1 Nullstellen biquadratischer Funktionen

Dies ist die biquadratische Funktion in Allgemeiner Form (AF): $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ mit $a,b,c,x,f \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Nullstellen sind diejenigen x, für die f Null wird: $f = 0$. Also findet man die Nullstellen, indem man die biquadratische Gleichung $0 = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ löst.

Eine biquadratische Gleichung ist die Nullstellengleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, also hat sie maximal 4 x, die die Gleichung lösen.

Als Lösungsmethode wenden wir die **Substitution** an: $z = x^2$.

Damit haben wir eine quadratische Gleichung in z:

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

Diese Gleichung können wir wie jede quadratische Gleichung lösen, siehe `http://warnckes.info/g11a/quad_null.pdf`, z.B. mittels pq-Formel.

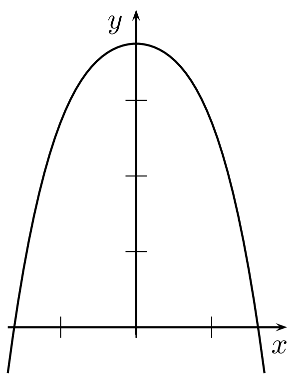
Betrachten wir eine **Anwendungsaufgabe** (LS S. 98 Nr. 2):

Das Wahrzeichen von St. Louis ist ein Torbogen als Symbol der Besiedlung des US-amerikanischen Westens. Dieser „Gateway Arch" (Torbogen) wurde im Oktober 1965 fertig gestellt, die Baukosten betrugen weniger als 15 Millionen US-Dollar, es ist das höchste Bauwerk der Stadt. Die Verkleidung ist aus rostfreiem Stahl und wurde von der Firma Krupp geliefert.

Der Innenbogen des „Gateway Arch" in St. Louis (USA) lässt sich näherungsweise beschreiben (x in Metern) durch die Funktion

$$f(x) = 187{,}5 - 0{,}01579 \cdot x^2 - 0{,}000001988 \cdot x^4$$

Berechnen Sie die Höhe und Breite des Innenbogens!



Nun wird hier leider eine Berechnung der Höhe gefordert. Bei einer Aufgabe „Geben Sie die Höhe des Innenbogens an" wäre klar, dass man sofort „187,5 Meter" antworten würde. Man könnte dies auch mathematisch begründen, da die Funktion gerade (YAS) und nach unten offen[1] ist und folglich der **Scheitelpunkt** ein Hochpunkt sein muss. Da eine Berechnung gefordert ist, wird man das Schema der Hochpunkt-Berechnung durchziehen.

[1] Sowohl der biquadratische als auch der quadratische Koeffizient ist jeweils negativ, also ist das Absolutglied 187,5 der höchste Funktionswert.

1.1 Hochpunkt

Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt ist $f'(x_H) = 0$ und $f''(x_H) < 0$. Die Ableitungen der genannten Funktion sind: $f'(x) = -0{,}000007952 \cdot x^3 - 0{,}03158 \cdot x$ und $f''(x) = -0{,}000023856 \cdot x^2 - 0{,}03158$. Notwendigerweise ergibt sich für den Hochpunkt die Gleichung: $0 = (0{,}000007952 \cdot x_H^2 + 0{,}03158) \cdot x_H$. Nach EPiNweFNi ist $x_H = 0$ die einzige Nullstelle der ersten Ableitung, denn die Klammer hat keine Nullstelle. x_H eingesetzt in $f''(x)$ ergibt: $f''(x_H) = f''(0) = -0{,}03158 < 0$ also wie erwartet einen Hochpunkt H. x_H eingesetzt in $f(x)$ ergibt: $f(x_H) = f(0) = 187{,}5$ wie wir gleich erwartet hatten: $H(0|187{,}5)$.

Die Höhe des Innenbogens des „Gateway Arch“ in St. Louis beträgt also 187,5 Meter.

1.2 Nullstellen

Die **Breite** des Innenbogens ergibt sich aus der Berechnung der Nullstellen der Funktion. Leider können wir nicht direkt die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades mittels einer Formel berechnen. Bei einer biquadratischen Funktion berechnen wir die Nullstellen mittels Substitution: $z = x^2$. D.h. wir setzen in der Nullstellengleichung z^2 für x^4 und z für x^2 ein.

Damit haben wir eine quadratische Gleichung in z:

$$\begin{aligned} 0 &= 187{,}5 - 0{,}01579 \cdot z - 0{,}000001988 \cdot z^2 && |: (-0{,}000001988) \\ 0 &\approx z^2 + 7942{,}655935613682 \cdot z - 94315895{,}3722334 && |\ pq \\ z_{1,2} &\approx -3971{,}33 \pm \sqrt{3971{,}33^2 + 94315895} \end{aligned}$$

Wegen $z = x^2$ interessiert nur die positive Lösung $z_1 \approx -3971{,}33 + \sqrt{3971{,}33^2 + 94315895}$, und hieraus die positive Wurzel[2] $x_N = \sqrt{z_1}$, also: $z_1 \approx -3971{,}3 + 10492{,}3 = 6521 \Longrightarrow x_N \approx 80{,}8$.

Die gesuchte Breite des Innenbogen beträgt also rund 162 Meter.

Für die ästhetisch wie geometrisch auch besonders wichtigen Außenmaße des „Gateway Arch“ nennt http://de.wikipedia.org/wiki/Jefferson_National_Expansion_Memorial die Höhe 192 Meter und ebenfalls eine Spannweite von 192 Metern.

[2] Mathematisch folgt natürlich aus $z_1 = x_N^2$ auch noch die negative Lösung dieser reinquadratischen Gleichung: $-\sqrt{z_1} = -x_N \approx -80{,}8$. Aber da wir uns der YAS bewußt sind, rechnen wir sofort die Breite als $B = 2 \cdot x_N \approx 162$ aus.