Freie Hansestadt Bremen Gymnasium LdW	mat44 *Datum:*	Mathematik Dezember 2014	Lehrer: Torsten Warncke

1. Musterlösung der Klausur: Logarithmus und Folgen

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner (GTR), Formelsammlung, Geodreieck, Schablonen, Zirkel.

1.1. Simple Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung auf 2 Nachkommastellen genau (ggf. runden).
a) $4 \cdot 7^x = 249 \quad |:4$
$7^x = 249/4 = 62,25 \quad |\log_7$
$x = \log_7 62,25 = \frac{\ln 62,25}{\ln 7} \approx 2,12$
b) $3^x = 52 \quad |\log_3$
$x = \log_3 52 = \frac{\ln 52}{\ln 3} \approx 3,597 \approx 3,60$
c) $3 \cdot 4^x = 37 \quad |:3$
$4^x = 37/3 = 12\frac{1}{3} \quad |\log_4$
$x = \log_4 12\frac{1}{3} = \frac{\ln 12\frac{1}{3}}{\ln 4} \approx 1,81$
d) $6 \cdot 2^{x-3} = 502 \quad |:6$
$2^{x-3} = 502/6 = 83\frac{2}{3} \quad |\log_2$
$x - 3 = \log_2 83\frac{2}{3} = \frac{\ln 83\frac{2}{3}}{\ln 2} \approx 6,38658 \quad |+3$
$x \approx 9,39$

1.2. Hefekultur

Das Wachstum einer Hefekultur wird durch die Funktionsgleichung $y = 1,5 \cdot 2,1^x$ beschrieben. Hierbei ist x die Zeitdauer in Stunden und y die Masse der Hefekultur in kg.
a) Berechnen Sie, wann die Hefekultur die Masse 10 kg erreicht hat.
$10 = 1,5 \cdot 2,1^{x_1} \quad |:1,5$
$6\frac{2}{3} = 2,1^{x_1} \quad |\log_{2,1}$
$\log_{2,1} 6\frac{2}{3} = \ln 6\frac{2}{3}/\ln 2,1 \approx 2,556981392516181 37 \approx x_1$
Nach ca. 2,557 Stunden (etwa 2 Stunden und 33 Minuten) hat die Hefekultur die Masse 10 kg erreicht.
b) Ermitteln Sie die Verdopplungsdauer dieses Prozesses.
$3 = 1,5 \cdot 2,1^{x_2} \quad |:1,5$ Denn 3 ist das Doppelte der Anfangsmasse 1,5 (kg).
$2 = 2,1^{x_2} \quad |\log_{2,1}$
$\log_{2,1} 2 = \ln 2/\ln 2,1 \approx 0,934239508880324 \approx x_2$
Nach ca. 0,934 Stunden (etwa 56 Minuten) hat sich die Masse der Hefekultur verdoppelt.

1.3. Radioaktive Probe

Eine radioaktive Probe zerfällt mit der Funktionsgleichung $y = 100 \cdot 0,37^x$. Hierbei ist x die Zeitdauer in Minuten und y die Masse der radioaktiven Probe in kg. Bestimmen Sie die Halbwertszeit in Sekunden.
$50 = 100 \cdot 0,37^{x_H} \quad |:100$ Denn 50 ist die Hälfte der Anfangsmasse 100 (kg).
$0,5 = 0,37^{x_H} \quad |\log_{0,37}$
$\log_{0,37} 0,5 = \ln 0,5/\ln 0,37 \approx 0,697154232525669094604708393$ min $\approx 41,829$ Sekunden $\approx x_H$
Die Halbwertszeit der radioaktiven Probe beträgt etwa 42 Sekunden.

1.4. Schnittpunkt

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktionen f und g, wenn die Funktionsgleichungen $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 20 \cdot 3^{-x-2}$ lauten.
Gleichsetzen

$$\begin{aligned}
5 \cdot 3^x &= 20 \cdot 3^{-x-2} && |:5\\
3^x &= 4 \cdot 3^{-x-2} && |\cdot 3^{+x+2}\\
3^{2x+2} &= 4 && |\log_3\\
2x+2 &= \log_3 4 = \ln 4/\ln 3 \approx 1,2618595 && |-2\\
2x &\approx 1,2618595 - 2 \approx -0,73814 && |:2\\
x &\approx -0,36907
\end{aligned}$$

Einsetzen $f(x) = 5 \cdot 3^{-0,36907} \approx 3\frac{1}{3} = g(x) = 20 \cdot 3^{0,36907-2} \approx 3\frac{1}{3}$ ergibt die y-Koordinate, so dass auf 2 Nachkommastellen der Schnittpunkt der beiden Funktionen bei $S(-0,37 \mid 3,33)$ liegt.

1.5. Wettrennen als geometrische Reihe

Bei einem Wettrennen läuft A fünfmal so schnell wie S, so dass S einen Vorsprung von 1 m bekommt. Die Geschwindigkeit von S beträgt $v_S = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (dies sind 3,6 km/h). Berechnen Sie, wann und wo A und S sich mathematisch exakt begegnen. (Tipps: $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q}$ für $0 < q < 1$ und $a_0 \neq 0$.)
Wie u.a. im Unterricht und in `http://warncke-family.de/g11a/Achilles.pdf` besprochen benutzt man zur Lösung die in den Tipps genannte Formel der geometrischen Reihe und setzt für $a_0 = 1$ den Vorsprung der Schildkröte und für $q = \frac{1}{5}$ das Verhältnis der S-Geschwindigkeit zur A-Geschwindigkeit ein. Es ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} = 1,25$$

für den gemeinsamen Treffpunkt in Metern. Physikalisch ist dieser Treffpunkt nach $t = \frac{s}{v} = \frac{1,25}{5}\text{s} = 0,25$ Sekunden bereits erreicht und zeigt, dass eine unendliche Reihe in einer endlichen (kurzen) Zeit erreicht ist, und A schnell an S trotz Vorsprung vorbei rauscht.

1.6. Kraterproblem

Der Wagen von T ist in die Mitte von einem parabelförmigen Krater geraten, dessen Kraterrand sich 30 m entfernt bis auf 45 m auftürmt. Bestimmen Sie mithilfe des bekannten Grenzwertprozesses, welche maximale Steigung der Wagen hierzu bewältigen muss. (Tipps: Bestimmen Sie zunächst die Funktionsgleichung der Parabel $y = a \cdot x^2$. Nähern Sie dann einen Punkt B dem Kraterrand A immer näher an und berechnen Sie die Steigung $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ der Gerade aus A und B (Sekante).)
Wie u.a. im Unterricht und in http://www.warncke-family.de/g11a/pampa_Kraterproblem.pdf besprochen benutzt man zur Lösung die in den Tipps genannten Hinweise.
Legt man das Koordinatensystem in die Mitte des Kraters, so ist der Kraterrand im Punkt $A(30|45)$. Diesen setzen wir in die Funktionsgleichung $y = a \cdot x^2$ ein, um den unbekannten Parameter a zu bestimmen:
$45 = a \cdot 30^2 \qquad |:900$
$0,05 = a.$
Nun erstellen wir eine Wertetabelle, wo wir einen 2. Punkt B mit Koordinaten x_B und y_B immer näher an den Kraterrand A mit festen Koordinaten $x_A = 30$ und $y_A = 45$ annähern und die Steigung m der Gerade durch diese beiden Punkte A,B berechnen.

x_A	x_B	y_A	$y_B = 0,05 \cdot x_B^2$	$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$
30	10	45	5	2
30	20	45	20	2,5
30	25	45	31,25	2,75
30	29	45	42,05	2,95
30	29,9	45	44,7005	2,995
30	29,99	45	44,970005	2,9995
30	29,999	45	44,99700005	2,99995
30	29,9999	45	44,9997000005	2,9999949999
30	29,99999	45	44,99997	2,9999995001
30	29,999999	45	44,999997	2,9999999467

Aus der Tabelle stützt sich die Vermutung dass m gegen den Grenzwert 3 wandert, je näher man den Punkt B zum Kraterrand (A) schiebt. Der Wagen müsste demnach eine maximale Steigung $m_{\max} = 3 = 300\%$ bewältigen (was technisch nahezu unmöglich ist).