Einige grundlegende Eigenschaften ganzrationaler Funktionen behandelt im Buch von Lambacher/Schweizer (LS) auf S.39:

1 LS S. 39 Nr. 2 a,b

a) $f(x) = -0{,}2x^3 + 6x = -0{,}2x^3 + 6x^1$ Die Funktion hat also nur ungerade Exponenten (1,3) und ist somit ungerade (0PS).
b) $f(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Die Funktion hat sowohl ungerade Exponenten (1,3) als auch gerade Exponenten (0,2) und ist somit weder gerade noch ungerade. Aus der Form $f(x) = (x-1)^3$ könnte man allerdings ersehen, dass es sich um eine um eine Einheit nach rechts verschobene x^3-Funktion handelt, und dass demnach eine Punktsymmetrie am Punkt $(1|0)$ vorliegt.

2 LS S. 39 Nr. 5 a,b

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 4x$ Bedingung für eine Nullstelle ist $f = 0$, also muss man die Gleichung $\underline{0} = 0{,}5x^3 - x^2 - 4x$ lösen. Die Funktion und diese Gleichung sind vom Grad $n = 3$. Es gilt der Satz[1]: „Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat maximal n Nullstellen.“. Demnach können wir maximal 3 Nullstellen finden, doch wie? Es gibt keine allgemeine Lösungsformel in der Schule. Man muss mit unterschiedlichen Tricks arbeiten. Hier wäre es schlau, den Trick AUSKLAMMERN[2] anzuwenden. Besonders praktisch wäre es, gleich den Faktor $0{,}5x$ aus dem Polynom auszuklammern. Dann ergibt sich die zu lösende Gleichung als:

$$0 = \underbrace{0{,}5x}_{\text{Ein Faktor}} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x - 8)}_{\text{Ein weiterer Faktor}}$$

Warum wurde $0{,}5x$ ausgeklammert (faktorisiert)? Es gilt der Satz vom <u>Null</u>produkt: „Ein Produkt ist <u>Null</u>, wenn ein Faktor <u>Null</u> ist (EPiNweFNi).“ D.h., dass die Gleichung von den x gelöst wird, die entweder $0{,}5x = \underline{0}$ oder $(x^2 - 2x - 8) = \underline{0}$ erfüllen. Die erste Nullstelle ist dann also $x_1 = 0$, die weiteren Nullstellen ergeben sich mit der pq-Formel: $x_{2,3} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - (-8)} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3$ zu $x_2 = 4$ und $x_3 = -2$.

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ Bedingung für eine Nullstelle ist $f = 0$, also muss man die Gleichung $\underline{0} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ lösen. Die Funktion und diese Gleichung sind vom Grad $n = 4$, wir erwarten also maximal 4 Nullstellen. Wegen dem Absolutglied 2 macht es hier keinen Sinn x (oder x^2) auszuklammern. Ein neuer Zaubertrick muss her: SUBSTITUTION. Substituiere (Ersetze) $x^2 = z$ und die zu lösende Gleichung sieht viel einfacher aus: $\underline{0} = \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{2}z + 2$. Nach Multiplikation mit 4 (dem Kehrwert von $\frac{1}{4}$) lässt sich diese Gleichung mit der pq-Formel lösen: $z_{1,2} = 3 \pm 1$. Um die ursprüngliche Gleichung zu lösen, muss man die x ermitteln, d.h. wir müssen aus den gefundenen z noch die x ausrechnen: $z_1 = 4 = x^2 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ und

[1] „Fundamentalsatz der Algebra“ oder kurz „Nullstellensatz“, auch „Polynome n. Grades haben max. n Nullstellen“.
[2] um ein Fremdwort zu bemühen, kann man statt „Ausklammern“ auch von „Faktorisieren“ sprechen.

$z_2 = 2 = x^2 \implies x_{3,4} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}414$. Hier finden wir also tatsächlich auch 4 Nullstellen der ursprünglichen Gleichung: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ und $x_4 = -\sqrt{2} \approx -1{,}414$.

3 LS S. 39 Nr. 7 a,b,d,e

a) Gegenbeispiel: $f = x^2$ hat nur eine Nullstelle, obwohl es eine gerade, ganzrationale Funktion vom Grad $n = 2$ ist[3].
b) wahr: Jede ungerade, ganzrationale Funktion ist 0PS und geht durch den Ursprung, da nur ungerade Exponenten (1,3,...) auftreten. Die entsprechenden Potenzen $(x^1, x^3, \dots)$ sind alle Null für $x = 0$, also ist der Ursprung $(0|0)$ immer ein Punkt dieser Funktionen.
d) Gegenbeispiel: x^3 hat nur eine Nullstelle, obwohl es eine ungerade, ganzrationale Funktion vom Grad $n = 3$ ist.
e) wahr: folgt aus b) oder dem asymptotischen Verhalten einer ganzrationalen Funktion vom Grad $n = 3$: Wie ist das Verhalten der Funktion „im Unendlichen“, d.h. für $x \to -\infty$ („links“) bzw. für $x \to \infty$ („rechts“)? Bestimmt durch den Term mit dem höchsten Exponenten bei ganzrationalen Funktionen:

$x \to -\infty$ („links“)	$x \to \infty$ („rechts“)	Term mit dem höchsten Exponenten
$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n = \infty$	für $a_n > 0$ und n ungerade, z.B. x^3, $a_3 = +1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n = -\infty$	für $a_n < 0$ und n ungerade, z.B. $-x^3$, $a_3 = -1$

Wir wissen, dass wir ganzrationale Funktionen ohne den Stift abzusetzen zeichnen können, man sagt, dass diese stetig sind. Da aus der Tabelle hervor geht, dass jede ganzrationale Funktion 3. Grades asymptotisch entweder von $-\infty$ nach $+\infty$ (für $a_3 > 0$) oder von $+\infty$ nach $-\infty$ (für $a_3 < 0$) verläuft, ist klar, dass die x-Achse geschnitten werden muss. Also hat jede ganzrationale Funktion 3. Grades[4] mindestens eine Nullstelle.

4 LS S. 39 Nr. 9 a–d $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{2}$

a) YAS wegen gerader Exponenten (0,2,4)
b) Setze $z = x^2$ wie in 5.b) und Du erhältst $N_1(-3|0)$, $N_2(3|0)$, außerdem sieht man sofort $S_y(0 \mid -\frac{3}{2})$.
c) Für $x \to \pm\infty$ ist $f \to \infty$, denn das Verhalten ist durch $\frac{1}{6}x^4$ bestimmt.
d) Graph siehe LS, S. 300, Fig. 3

[3] $f = x^4 + 1$ hätte gar keine Nullstelle obwohl es sogar eine gerade, ganzrationale Funktion vom Grad $n = 4$ ist.
[4] Ebenso hat jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades ($n = 1{,}3{,}5{,}7{,}\dots$) mindestens eine Nullstelle.