Freie Hansestadt Bremen Gymnasium LdW	Klasse E4 *Datum:*	Mathematik 02.12.2014	mat44 Torsten Warncke

1. Zenons Paradoxon: Achilles und die Schildkröte

Zenon von Elea (um 490 v. Chr. – 430 v. Chr.), hat nach Aristoteles (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) überlegt, „dass das langsamste Wesen (Schildkröte) in seinem Lauf niemals von dem schnellsten (Achilles) eingeholt wird. Denn der Verfolger (Achilles) muss immer erst zu dem Punkt gelangen, von dem das fliehende Wesen (Schildkröte) schon aufgebrochen ist, so dass das langsamere immer einen gewissen Vorsprung haben muss.“ Dies ist paradox, wiederspricht es doch der Alltagserfahrung, dass Achilles schnell die Schildkröte überholen wird.

1.1. Anschaulich

Nehmen wir der Einfachheit an, dass Achilles nur 10-mal so schnell wie die Schildkröte ist, also z.B., dass die Schildkröte mit $v_S = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ rennt („Turboschildkröte“), und Achilles mit $v_A = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (immerhin sind dies 36 km/h), s.a. Buch EdM, S. 118f. Bei einem Vorsprung der Schildkröte von 10 m hat Achilles somit in einer Sekunde den Vorsprung eingeholt. In dieser einen Sekunde ist aber auch die Schildkröte gelaufen und hat einen ganzen Meter zurück gelegt, hat also wiederum einen Vorsprung von 1 m. Diesen Vorsprung von 1 m wird Achilles in einer Zehntel Sekunde einholen, die Schildkröte hat in dieser Zehntel Sekunde nun einen Zehntel Meter zurück gelegt, hat also nun einen Vorsprung von 10 cm. Achilles holt dies in einer Hundertstel Sekunde auf, die Schildkröte ist wieder entsprechend weiter, usw. usf.

Tabellarisch sieht dies so aus:

Folge k	Zeit in Sekunden	Weg s_A von Achilles in m	Weg s_S der Schildkröte in m
0	0	0	10
1	1	10	11
2	1,1	11	11,1
3	1,11	11,1	11,11
4	1,111	11,11	11,111
5	1,1111	11,111	11,1111
6	1,11111	11,1111	11,11111
7	1,111111	11,11111	11,111111
8	1,1111111	11,111111	11,1111111
9	1,11111111	11,1111111	11,11111111
...	...	...	...

Kurzum: Achilles kann die Schildkröte nicht einholen!?

Zenon hat Recht: An keiner der angesprochenen, unendlich vielen Stellen hat Achilles die Schildkröte erreicht. Aber er setzt voraus, dass die Summe der unendlich vielen

Streckenabschnitte auch einen unendlich langen Weg ergibt, für deren Zurücklegung Achilles dann auch eine unendliche Zeitspanne benötigt, und dies ist eben nicht der Fall. Anhand der Tabelle kann man schon vermuten, dass die Wege von Achilles und der Schildkröte sich immer mehr annähern.

1.2. Lösung als geometrische Reihe

Wie man obiger Tabelle (1.1) entnehmen kann, wird in der Folge der Zeiten und Wege jedes Wegstück, das hinzu kommt kleiner und kleiner. Das hinzukommende Wegstück gehorcht mathematisch einer „Folge" und geht mathematisch im Grenzwert (limes) für ∞-viele Aufholschritte k gegen null: $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{10})^k = 0$.

Die von Achilles zurückzulegende Gesamtstrecke, um die Schildkröte einzuholen, beträgt in Metern:

$$10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 10 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 11\frac{1}{9}$$

Denn die unendliche Summe ($\sum_{k=0}^{\infty}(\ldots)$) ist eine **geometrische Reihe**, für die die Formel gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q}$$

Hierbei muss $0 < q < 1$ sein, was für unser Beispiel erfüllt ist, denn hier gilt $q = \frac{1}{10}$ und ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten von Schildkröte zu Achilles. Die geometrische Reihenformel gilt für beliebige $0 < q < 1$, so haben wir im Unterricht auch das Beispiel mit $q = \frac{1}{2} = 0{,}5$ gerechnet. a_0 ist der Startwert der Folge, hier der Vorsprung 10 m.

1.3. Anmerkungen

Für Rechthaber, Zenon-Liebhaber und leidenschaftliche Kritiker sei angemerkt,

dass 1. Schildkröten viel länger leben als Achilles, von dem es heißt, dass er jung gestorben sei (s. z.B. http://de.wikipedia.org/wiki/Achilleus#Tod), so dass nach wenigen Jahrhunderten, doch die Schildkröte gewinnen würde (zumal es Achilles sicher widerstreben würde, sehr lange geradeaus zu laufen, ohne dabei „Heldentaten" zu vollbringen),

dass 2. Physiker die immerwährende Teilung der Strecke auf Bruchteile von Elementarteilchen als nicht mehr durchführbar erachten werden. Unter Berücksichtigung der Heisenbergschen Unschärferelation ist die Frage, ob er sie einholt, ohnehin keine korrekt gestellte physikalische Frage mehr. Nach neueren Erkenntnissen der Physik (String-Theorie), hat es keinen Sinn, über Zeitintervalle zu sprechen, die kleiner sind als die Planck-Zeit von 10^{-43} Sekunden oder Strecken kleiner als die Planck-Länge von 10^{-35} Metern.