Aufgaben zu Wachstum etc. über die Osterferien

1. **Das Bevölkerungsgesetz von Thomas R. Malthus** (1766 – 1834)

   Im Jahre 1798 veröffentlichte der englische Philosoph Thomas R. Malthus sein „Essay on the Principles of Population“. Er vermutete, dass die Nahrungsmittelerzeugung dem rasanten Bevölkerungswachstum im Zuge der industriellen Revolution nicht würde folgen können, und prognostizierte permanente Hungersnöte, die wir heute in Entwicklungsländern z.T. beobachten können. Zur Begründung seiner Thesen entwickelte er einfache Modelle für das Wachstum von Populationen: die Bevölkerung wachse exponentiell, die zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel jedoch nur linear.
   Mit seiner „Wachstumsfunktion“ $N = N_0 \cdot 1,0302^t$ gelang es Malthus, das Bevölkerungswachstum in den USA für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts gut zu beschreiben:

THOMAS ROBERT MALTHUS (1766–1834)

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
N (in Mio.)	$N_0 = 3,9$	$5,3$	$7,2$	$9,6$	$12,9$	$17,1$	$23,2$	$31,4$

   (a) Vergleiche die Angaben aus Volkszählungen mit den „theoretischen“ Werten der Wachstumsfunktion.

   (b) Aus späteren Volkszählungen sind folgende Anzahlen bekannt:

Jahr	1880	1900	1930	1970
N (in Mio.)	$50,2$	$76,0$	$123,2$	$203,2$

Überprüfe, ob die Wachstumsfunktion noch sinnvoll ist. Begründe!

(c) Betrachtet wird eine Bevölkerung, die zu Beginn eines bestimmten Jahres aus 1 Million Personen besteht und jährlich um 3% wächst. Zum gleichen Zeitpunkt wären Nahrungsmittel für 2 Millionen Personen verfügbar, wobei die Produktion der Nahrungsmittel für jährlich 100000 Personen gesteigert werden könnte. Untersuche diese Entwicklung (mithilfe einer Tabellenkalkulation). In welchem Jahr übersteigt die Anzahl der Personen die zur Verfügung stehenden Mittel?

Quelle: Abakus 10 (1995), Schöningh

Lösung: (a)

$3,9$	$5,3$	$7,1$	$9,5$	$12,8$	$17,3$	$23,2$	$31,3$

(b)

$56,8$	$102,9$	$251,2$	$825,9$

Gründe für die schlechte Passung: Weltkriege und Rezessionen führen zu einem veränderten Fortpflanzungsverhalten

(c) $f(t) = 1.000.000 \cdot 1,03^t$ und $g(t) = 100.000t + 2.000.000$

t	0	1	2	3	4	5	...	75	76	77	78
$f(t)$ in Mio	1	$1,03$	$1,06$	$1,09$	$1,13$	$1,16$		$9,2$	$9,5$	$9,7$	$10,0$
$g(t)$ in Mio	2	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$	$2,5$		$9,5$	$9,6$	$9,7$	$9,8$

Tabellarische Darstellung ist auch im Sinne einer systematischen Einschachtelung möglich. Ansatzweise Termumformung: $1.000.000 \cdot 1,03^t = 2.000.000 + 100.000t \Leftrightarrow 1,03^t - 0,1t = 2$. Hier ist der Tippaufwand geringer als oben und die Lösung schneller erreichbar: $76 < t < 77$.

2. **Exponentielle Prozesse**

Quellen für Aufg. 2-14: Elemente 11, Abakus 10, Mathematik 11 Hessen, Mathematik 12.1 GK Hessen

Meerschweinchen

Am Eröffnungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.

(a) Wie viele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?

(b) Wie viele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?

(c) Lässt sich die Vermehrung der Meerschweinchen eher mit dem linearen oder dem exponentiellen Modell erklären?

Lösung: (a) 313

(b) 777

3. **Untersuchung der Bauchspeicheldrüse**

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute 4% des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.

Bei einer Untersuchung wird einem Patienten $0,2$ Gramm des Farbstoffes injiziert. Nach 30 Minuten sind noch $0,09$ Gramm des Farbstoffes in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden.
Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

Lösung: Nein, da nur noch $0,06\,\mathrm{g}$ vorhanden sein dürfen.

4. **Wie hoch springt der Ball?**

   Ein Ball fällt aus 2 m Höhe auf eine feste Unterlage und springt nach jedem Aufprall jeweils auf 80% der Höhe zurück, aus welcher er gefallen ist.
   Stelle den Funktionsterm auf, der angibt, welche Höhe der Ball nach dem n-ten Aufprall erreicht. Wie hoch springt der Ball nach dem 5. Aufprall?

Lösung: $0,66\,\mathrm{m}$

5. **Bakterien vernichten**

   Ein Bakterienstamm kann durch Erhitzung vernichtet werden. Die Abnahme der Individuen folgt näherungsweise dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot 0,8^t$.
   Wie viele Bakterien lagen zu Beginn der Beobachtung vor, wenn es nach 2 Stunden noch 960 sind?
   Wann ist der Bakterienstamm abgestorben (d.h. weniger als ein Bakterium vorhanden)?

Lösung: 1500; 33 h

6. **Bevölkerungswachstum**

   Wann wird bei Annahme gleich bleibender Wachstumsrate

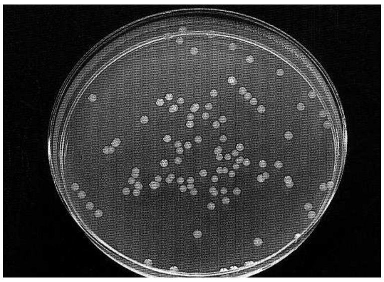
	Bevölkerung 1991	Jährliche Wachstumsrate
Afrika	631.000.000	$2,9\%$
Asien und Ozeanien	3.073.000.000	$1,9\%$
Lateinamerika	497.000.000	$2,7\%$

   - die Bevölkerung von Afrika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
   - die Bevölkerung von Lateinamerika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
   - Stelle das Bevölkerungswachstum graphisch dar.

Lösung: ≈ 162 Jahre; ≈ 232 Jahre (etwas länger zum „Übertreffen“)

7. **Forschung mit Bakterien**

   In einem Forschungslabor wird ein neues Medikament gegen eine Infektionskrankheit entwickelt. Dazu wird unter anderem das Wachstum einer bestimmten Bakterienart experimentell untersucht. Das dargestellte Messprotokoll gibt die Anzahl N der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t an.



t in min	30	40	50	60	70	80	90
N in 100	17	24	34	48	68	96	136

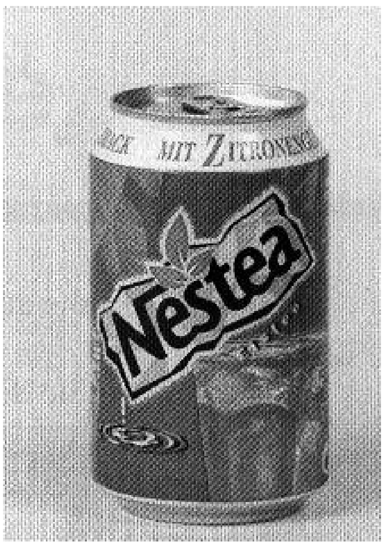
(a) Wie viele Bakterien kann man nach 2 h, 3 h, 4 h und 5 h erwarten, wenn man die gleiche Verdopplungszeit annimmt? Stelle den Sachverhalt in einem Koordinatensystem dar.

(b) Auch vor Beginn der Beobachtung verdoppelte sich die Anzahl der Bakterien jeweils in der gleichen Zeit. Wie viele Bakterien befanden sich zu Versuchsbeginn ($t = 0$) in der Glasschale? Ermittle die Anzahl der Bakterien 10 min, 30 min und 1 h vor Versuchsbeginn.

Lösung: (a) 384 / 3072 / 24576 / 196608
(b) 6 / 4,25 / 2,125 / 0,75

8. **Koffein**

Abbau von Koffein im Blut
Eistee kann einen Koffeingehalt von 50 Milligramm pro 0,33 l Dose haben. Bei einem Jugendlichen setzt die Wirkung des Koffeins nach ca. 1 Stunde ein. Der Koffeingehalt im Blut nimmt dann exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden ab. Eine Büchse Eistee enthält 50 mg Koffein.
Wann sind nur noch 0,01 mg Koffein im Blut vorhanden, wenn der Abbau ca. 1 Stunde nach dem Verzehr beginnt?



Lösung: Zwischen 36 und 37 h nach Zerfallsbeginn (37 bzw. 38 h nach Einnahme $\approx 37,86$)

9. **Abbau eines medizinischen Wirkstoffs**

   Aus Unachtsamkeit wird einem Patienten die 2,5-fache Menge eines Medikamentes gespritzt. Er soll daher so lange unter medizinischer Kontrolle bleiben, bis sich im Körper nur noch die ursprünglich vorgesehene Dosis von 2 ml befindet. Es wird davon ausgegangen, dass pro Stunde etwa 4% des im Körper befindlichen Medikaments abgebaut und ausgeschieden werden.

   - Nach wie vielen Stunden ist im Körper des Patienten nur noch die Normaldosis - 2 ml - enthalten?
   - Veranschauliche den Abnahmeprozess in einem Graphen.
   - Bestimme die „biologische Halbwertzeit“ des Medikamentes sowohl am Graphen als auch rechnerisch.

Lösung: 23 h; 17 h

10. **Schlafmittel**

    Es gibt verschiedene Schlafmittel auf dem Markt, die zu einer besseren nächtlichen Schlafeinleitung führen sollen. Ihre Wirkung sollte jedoch spätestens am nächsten Morgen weitgehend abgebaut sein. Die Messung ergab, dass von 2 mg des Wirkstoffes Triazolam nach 3 Stunden 1,18 mg noch nicht abgebaut sind.
    Was ist von diesem Schlafmittel zu halten?

Lösung: Nach ca. 13 h ist die Konzentration auf ca. 10% abgesunken. $N(t) = N(0) \cdot 0,84^t$; $a^3 = \frac{1,18}{2} \Leftrightarrow a = 0,84$
Wenn „weitgehend abgebaut“ als Restmenge 10% angesehen wird, sind ca. 13,09 h richtig. Konsequenz: Vom Mittel ist abzuraten, da es zu lange wirkt. Was aber, wenn jemand mit größeren Prozentzahlen operiert? Ein schönes Beispiel für offeneres Herangehen, da die Voraussetzungen zum Lösen individuell variieren können und damit auch die Einschätzungen.

11. **Bevölkerungswachstum in unterschiedlichen Ländern**

    Die Tabelle enthält die Bevölkerungszahlen (in Tausend) von 1990 und 1999 für verschiedene Länder und eine Prognose für das Jahr 2020.
    Nimm an, dass zwischen 1990 und 1999 exponentielles Wachstum zugrunde liegt.

Jahr	1990	1999	2020
Brasilien	149042	161191	197950
Deutschland	79479	81378	73523
Indien	846191	931044	1328565
Mexiko	84486	91290	137717
USA	249975	260479	329337

(a) Welches Land hat den größten (den kleinsten) prozentualen Zuwachs pro Jahr?

(b) Überprüfe, ob bei der Prognose für das Jahr 2020 in den Ländern das exponentielle Wachstum beibehalten wurde.

Quelle: Elemente 11

Lösung: (a) Brasilien $0,87\%$; Deutschland $0,26\%$; Indien $1,07\%$; Mexiko $0,86\%$; USA $0,46\%$

(b) Deutschland nein, sogar Abnahme; Brasilien 193530 (ja); Indien 1163610 (?); Mexiko 109373 (?); USA 286737 (?). Tabellenwerte liegen über dem errechneten Wert; das Wachstum wird sich also beschleunigen, aber ob exponentiell, das lässt sich eigentlich nicht beantworten. Prozentualer Zuwachs pro Jahr ab 1999: Indien $1,71\%$; Mexiko $1,71\%$; USA $1,98\%$.

12. **Erdbevölkerung**

Es gibt optimistische Schätzungen, die davon ausgehen, dass die Erde mehr als 100 Milliarden Menschen ernähren kann. Die meisten Schätzungen gehen aber davon aus, dass die Obergrenze zwischen 8 und 12 Milliarden liegt.
1999 betrug die Erdbevölkerung $6,0$ Mrd. Bewohner. Die beiden Tabellen geben einige Wachstumsraten aus dem Jahre 1998 an.

Länder mit der höchsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent

1.	Gaza	4,6
2.	Komoren	3,6
3.	Libyen	3,6
4.	Jemen	3,5
5.	Togo	3,5
6.	Benin	3,4
7.	Niger	3,4
8.	Oman	3,4
9.	Zaire	3,4
10.	Madagaskar	3,3

Länder mit der niedrigsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent

10.	Deutschland	−0,1
9.	Rumänien	−0,2
8.	Tschechien	−0,2
7.	Weißrussland	−0,4
6.	Ungarn	−0,4
5.	Russland	−0,5
4.	Estland	−0,5
3.	Bulgarien	−0,5
2.	Ukraine	−0,6
1.	Lettland	−0,7

- Berechne die Verdopplungszeit der Bevölkerung von Gaza.

- Wann hat sich die Bevölkerung Lettlands halbiert? Wann ist die Bevölkerungszahl Lettlands auf 10% gegenüber dem heutigen Stand geschrumpft?
- Berechne die Bevölkerungszahl von Deutschland für die Jahre $2010, 2030$ und 2050.

Quelle: Analysis Grundkurs Gesamtband (2000), Klett

Lösung: Gaza: $\approx 15,41$ Jahre; Lettland: $\approx 98,67$ Jahre bzw. $\approx 327,79$ Jahre; BRD: $N_0 \cdot 0,999^t$

13. **Alkoholkontrolle**

Bei einer Verkehrskontrolle wird bei einem Verkehrsteilnehmer ein Alkoholgehalt im Blut von $0,8\,‰$ festgestellt. Nach einer Stunde ergibt die Blutanalyse einen Alkoholgehalt von $0,6\,‰$. Es ist eine Funktion gesucht, die den Abbau des Alkohols im Blut beschreibt.

(a) Berechne den Blutalkoholgehalt unter der Annahme, dass der Körper in jeder Stunde gleich viel Alkohol abbaut.

(b) Gehe davon aus, dass die stündliche Abbaumenge proportional zum vorhandenen Bestand ist.

(c) Vergleiche die beiden Ansätze und stelle die Entwicklung graphisch dar.

(d) Welche Schlüsse kann man auf den Alkoholgehalt im Blut des Verkehrsteilnehmers eine Stunde (zwei Stunden) vor der Kontrolle ziehen?

Lösung: Wir setzen $t = 0$ als den Zeitpunkt der Kontrolle und gehen davon aus, dass in der Abbauphase kein Alkohol konsumiert wurde.

(a) $g(t) = -0,2t + 0,8$

(b) Nach Voraussetzung gilt: $f(t) - f(t+1) = c \cdot f(t)$. Also gilt auch: $f(t+1) = (1-c) \cdot f(t)$ und allgemeiner $f(t) = (1-c)^t \cdot f(0)$. Demnach hier: $f(t) = (\frac{3}{4})^t \cdot 0,8$.

(c) Nach allem was wir über den Abbau von Blutalkohol wissen, ist ein lineares Modell angemessener. Entscheidungskriterium hier in erster Linie Fachkenntnisse.

(d) Vor einer Stunde: Pegel ca. 1 Promille in beiden Modellen.
Vor zwei Stunden: Lineares Modell: Pegel $1,2$.
Exponentielles Modell: Pegel ca. $1,4$.

14. **Wann verdoppelt sich das Geld?**

Geldanlage:
Wann verdoppelt sich das Geld?
Das ist leicht auszurechnen, wie die Gesellschaft für Bankpublizität mitteilt. Dafür müssen Sie lediglich die Zahl 70 durch die Rendite der Kapitalanlage teilen. Das bedeutet beispielsweise, bei einem Zinssatz von sieben Prozent sind aus angelegten 20.000 Euro in 10 Jahren bereits 40.000 Euro geworden ($70 : 7 = 10$).
Beträgt die Rendite fünf Prozent, dauert es entsprechend länger, nämlich 14 Jahre, bis sich das Kapital verdoppelt.
Voraussetzung, damit die Rechnung aufgeht, ist allerdings, dass Sie die fälligen Zinsen zu gleichen Bedingungen regelmäßig wieder anlegen und so den Zinseszins-Effekt nutzen.

Was meinst du dazu?

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung

Lösung: Diese „Faustformel“ liefert in dem „üblichen“ Zinsbereich sehr brauchbare Werte: Die Verdopplungszeit berechnet man mit: $2K_0 = K_0(1 + \frac{p}{100})^d$ umgeformt ergibt sich: $\lg 2 = d \cdot \lg(1 + \frac{p}{100})$, d.h. $d \approx \frac{0,3}{\lg(1+\frac{p}{100})}$.
Hintergrund-Info für Lehrer: Es gilt: $\ln 2 = d \cdot \ln(1 + \frac{p}{100})$, wegen $\ln(1 + x) \approx x$ (für kleine $|x|$) folgt: $d \cdot \frac{p}{100} \approx \ln 2 \approx 0,6931 \approx 0,7$, d.h. $d \cdot p \approx 70$.
Für sehr kleine p wäre also eigentlich 69 noch besser als 70 - aber 70 lässt sich natürlich leichter merken, und für die „üblichen“ Zinssätze liefert die 70 tatsächlich bessere Werte.

$p\%$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
t exakt	17,7	14,2	11,9	10,2	9,0	8,0	7,3	6,6	6,1	5,7	5,0
t Artikel	17,5	14	11,7	10	8,75	7,8	7	6,4	5,8	5,4	4,7

15. **Schuldentilgung**

Herr Huber möchte sich von seiner Bank 10000 Euro leihen.
Vorschlag A: Das Geld wird mit 8% verzinst, er muss nach 10 Jahren die Schulden mit Zinseszinsen zurückzahlen.
Vorschlag B: Das Geld wird mit 7% verzinst. Er muss aber jedes Jahr einen Abtrag von 1000 Euro vornehmen.
Für welchen Rückzahlungsmodus würdest du dich entscheiden?

Lösung: **Plan A:** $K_{10} = 10000 \cdot (1 + \frac{8}{100})^{10} = 21589,25$

Plan B: Man erkennt, dass zunächst fast nur Zinsen und kaum Tilgung geleistet werden. Es müssen nur $10000€ + 5855,07€ = 15855,07€$ gezahlt werden.

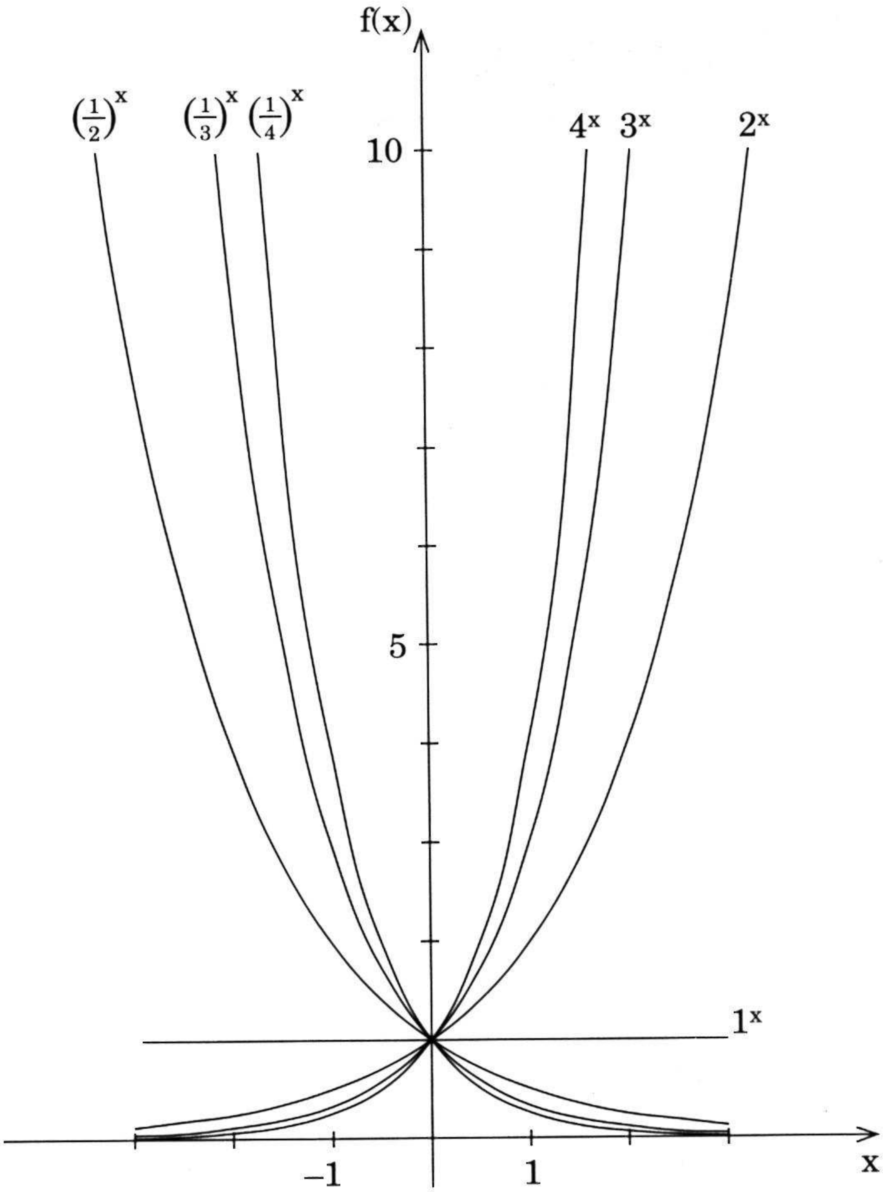
Jahre	Abtrag	Restschuld
1	1000	9700, 00
2	1000	9379, 00
3	1000	9035, 53
4	1000	8668, 02
5	1000	8274, 78
6	1000	7854, 01
7	1000	7403, 79
8	1000	6922, 06
9	1000	6406, 60
10	1000	5855, 07

Jahre	Einzahlung	Kapital 4%	Kapital 5%
1	0	0, 00	0
2	1000	1040, 00	1050, 00
3	1000	2121, 60	2152, 50
4	1000	3246, 46	3310, 13
5	1000	4416, 32	4525, 63
6	1000	5632, 98	5801, 91
7	1000	6898, 29	7142, 01
8	1000	8214, 23	8549, 11
9	1000	9582, 80	10026, 56
10	1000	11006, 11	11577, 89

Zusatz: Was passiert, wenn man die 1000 Euro jährlich spart, die man bei **Plan A** zunächst nicht zu zahlen hat?

In den 10 Jahren könnte Herr Huber nur ca. 1500 Euro an Zinsen erwirtschaften. **Plan A** bleibt trotzdem teurer.

16. **Deutungen der Koeffizienten der Exponentialfunktion**



Graphen zu $f(x) = a^x$ für verschiedene Werte von a

Einige Graphen der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ sind in der neben stehenden Abbildung dargestellt:

(a) Was fällt auf?

(b) Beweise die Vermutung!

(c) Jetzt sei $a = 2$.

Wie ändert sich der Graph, wenn c verändert wird? Quelle: mathematik lehren (1996), H. 75, S. 55-60

Lösung: (a) Es lassen sich eine Vielzahl von Eigenschaften angeben, u.a.:

- Spiegelt man den Graph von a^x an der y-Achse, so erhält man den Graph von $(\frac{1}{a})^x$
- Für $a > 1$ steigt der Graph
- Für $0 < a < 1$, fällt der Graph
- $1^x = 1$; der Graph ist eine Parallele zur x-Achse
- der Graph schneidet die x-Achse in $(0|1)$ bzw. in $(0|c)$
- die x-Achse ist Asymptote für Graphen mit $a \neq 1$

(b)

(c) $f(x) = c \cdot 2^x$: $c > 1$ Streckung; $0 < c < 1$ Stauchung; $c < -1$ Streckung und Spiegelung an der x-Achse; $-1 < c < 0$ Stauchung und Spiegelung an der x-Achse

17. **Zerfall radioaktiver Stoffe**

Beim radioaktiven Zerfall wandelt sich ein Stoff unter Aussendung von radioaktiver Strahlung in einen anderen Stoff um. Der ursprüngliche Stoff wird also weniger. Die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Atome des Stoffes bezeichnet man mit $N(0)$, die nach einer Zeit t noch vorhandene Anzahl mit $N(t)$. Dann lautet die Funktionsgleichung für den Zerfall radioaktiver Stoffe $N(t) = N(0) \cdot a^t$. Dabei ist a die $Zerfallskonstante$, die für jeden Stoff einen spezifischen Wert hat.

Meistens wird beim radioaktiven Zerfall die sog. $Halbwertszeit$ angegeben. Das ist die Zeit, in der die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Atome zerfallen ist.

(a) Für radioaktives Jod gilt $a = 0,917$.

i. Wie viel mg sind von 3 g dieses Jods nach 45 Tagen noch vorhanden?

ii. Bestimme die Halbwertszeit von radioaktivem Jod!

(b) Das Element Radon zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,8 Tagen. Nach welcher Zeit ist noch ein Achtel der Ausgangsmenge Radon vorhanden?

(c) Thorium zerfällt nach dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot 0,963^t$. Ein Stoff enthält 10 mg Thorium und 15 mg radioaktives Jod. Nach welcher Zeit sind von beiden Stoffen noch gleiche Mengen vorhanden?

Lösung: (a) i. 60,8 mg

ii. 8 Tage

(b) 11,4 Tage

(c) 8,3 Tage

18. **Eigenschaften der Exponentialfunktion**

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = b^x$ mit $x \in$ .... und $b \in$ ...., d.h. für den Definitionsbereich gilt: $D =$ ....

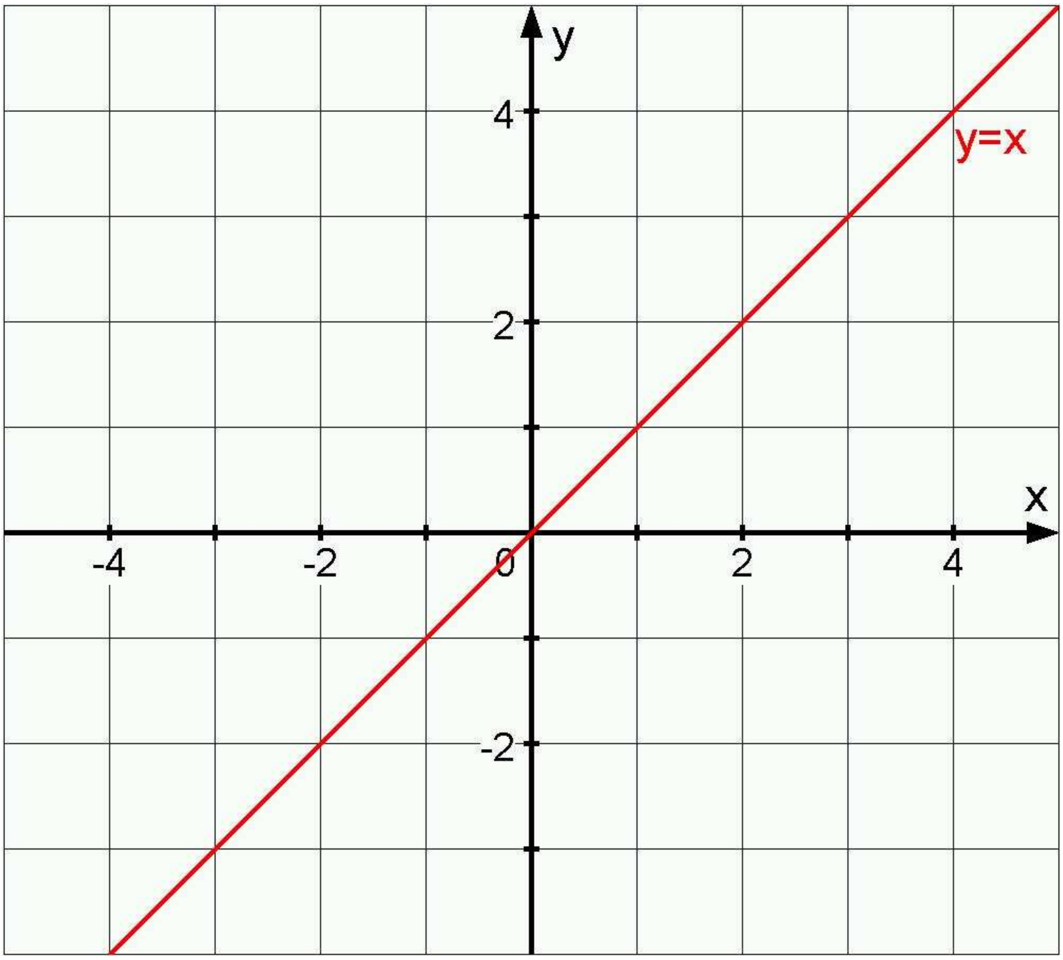
(a) Die Exponentialfunktion hat nur .... Funktionswerte y, d.h. für den Wertebereich gilt : $W =$ ....

(b) Die Graphen der Exponentialfunktionen $f(x) = b^x$ mit $b > 0$ gehen alle durch die Punkte $P_1(....;....)$ und $P_2(....;....)$.

(c) Die Graphen der Exponentialfunktionen $f(x) = b^x$

- mit .... sind streng monoton ....;
- mit .... sind streng monoton fallend;

(d) Der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ mit $b > 0$ hat die .... - Achse als Asymptote, das bedeutet ....



Zeichne hier die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

(e) Die charakteristische Eigenschaft von exponentiellem Wachstum ist:

(f) Beispiele für exponentielle Prozesse in der Realität sind:

(g) Was ich sonst noch wichtig finde:

19. **Flucht aus Heidelberg**

Im Jahr 1855 flüchtete in Heidelberg ein Student nach einem Duell mit einer Legitimationskarte, die er sich von einem Kommilitonen ausgeliehen hatte. Als die Flucht über die Grenze gelungen war, warf der Student die Karte fort; sie wurde als verdächtig an das Heidelberger Universitätsgericht eingesandt. In der folgenden Untersuchung antwortete der Kommilitone, dem die Karte gehörte, mit einem Satz, der sich zunächst unter den Studenten schnell verbreitete und heute als Redewendung allgemein bekannt ist. Dieser Satz ist der Lösungsspruch des Rätsels.

	Aufgaben:	Lösung
a)	$\log_3 27$	
b)	$\log_3 x = 2 \to x =$	
c)	$\log_x 49 = 2 \to x =$	
d)	$\log_{\frac{3}{4}} 3 - \log_{\frac{3}{4}} 4$	
e)	$(\log_2 2^{25}) : (\log_5 5^5)$	
f)	$\log_3 5 + \log_3 \frac{1}{5}$	
g)	$\log_2 4^2 + \log_2 4$	
h)	$\log_2 16 \cdot \log_2 4$	
i)	$6 \log_3 3 + \log_3 \frac{1}{9}$	
j)	$4(\log_2 88 - \log_2 11)$	
k)	$\log_2(\log_2 2^{2^{10}})$	
l)	$2 \log_2 5 + \log_3 90 + \log_2 \frac{1}{25} - \log_3 10$	

Zuordnung:

Lösung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Buchstabe	H	S	E	V	T	C	N	O	A	W	I

Lösung	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Buchstabe	B	M	Q	Y	L	Z	G	P	X	R	F

Als **Lösungssatz** ergibt sich eine Redewendung:

j)	l)	k)	g)	g)	h)	j)	l)	k)	d)	i)	f)	h)	d)	l)

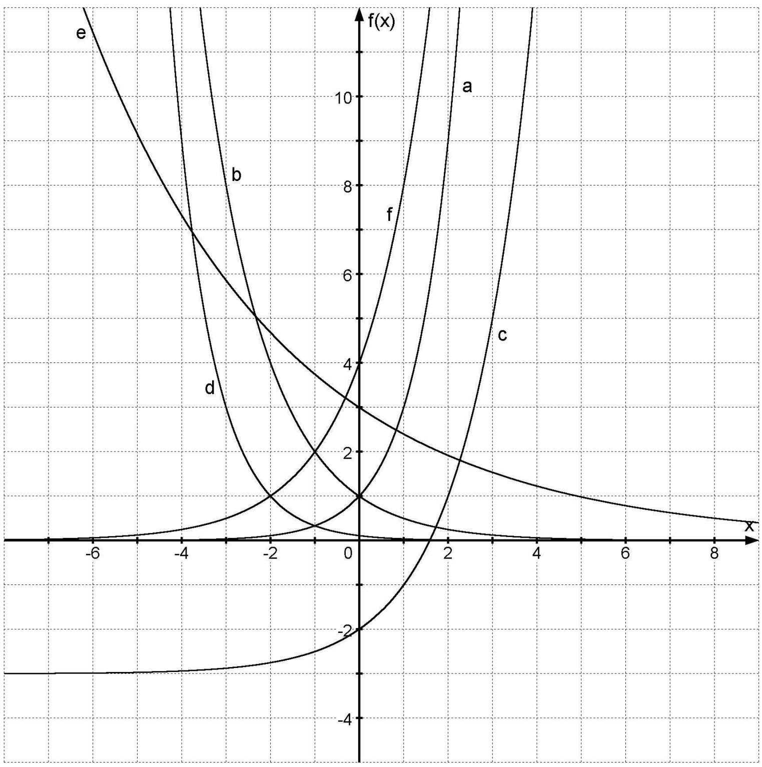
k)	e)	f)	b)	l)	k)	d)	d)	a)	c)	g)	g)	k)	e)	f)	i)	d)

Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

Lösung: Lösungen der Aufgaben: 3; 9; 7; 1; 5; 0; 6; 8; 4; 12; 10; 2
Lösungssatz: MEIN NAME IST HASE, ICH WEISS VON NICHTS.

20. **Funktionsgleichungen bestimmen**

Bestimme die Funktionsgleichungen zu den abgebildeten Graphen!



Lösung:
(a) $f(x) = 3^x$
(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
(c) $f(x) = 2^x - 3$
(d) $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ oder $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{3})^x$
(e) $f(x) = 3 \cdot 0,8^x$
(f) $f(x) = 4 \cdot 2^x$