# Aufgaben zu Wachstum, Exponential- und Logarithmusfunktion

1. Faltet man ein Stück Papier im DIN-Format mehrfach längs einer Mittellinie, so liegen erst zwei, dann vier Schichten übereinander. Es wird dabei immer kleiner und dicker. Wie oft müsste man es falten können, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht? (Entfernung des Mondes:384000 km, Papierdicke 0,2 mm)

*Lösung:* Bei einer Dicke von 0,2 mm erhält man ca. $n = 41$ Faltungen.

2. Am 1.1.1960 lebten $a_0 = 3{,}01$ Milliarden Menschen auf der Erde. In welchem Jahr überschreitet die Erdbevölkerung die 10 Milliardengrenze, wenn der jährliche Zuwachs 1,9% beträgt? In welchem Jahr erreichte die Menschheit die 2 Milliardengrenze?

*Lösung:* $n \approx 63{,}79\,a \implies$ im Jahre 2023 ; $n \approx -21{,}72\,a \implies$ im Jahre 1938

3. In einer Schale mit Nährflüssigkeit lebten am 1.1.1992 um 0.00 Uhr genau $N_0 = 100$ Bakterien. Die Bakterienkultur wächst täglich um 24%. An welchem Tag (Datum!) überschritt die Kultur die Millionengrenze? An welchem Tag wurde die Kultur mit genau 8 Bakterien angesetzt?

*Lösung:* $n \approx 42{,}82\,d \implies$ am 12.02.1992 ; $n \approx -11{,}74\,d \implies$ am 20.12.1991

4. **Eigenschaften der Logarithmusfunktion**

   **Logarithmusfunktionen** sind Funktionen der Form $f(x) = \log_b x$ mit $x \in$ .......... und $b \in$ .......... d.h. die Logarithmusfunktion ist nur für ............................ $x$-Werte definiert: $D =$ .............

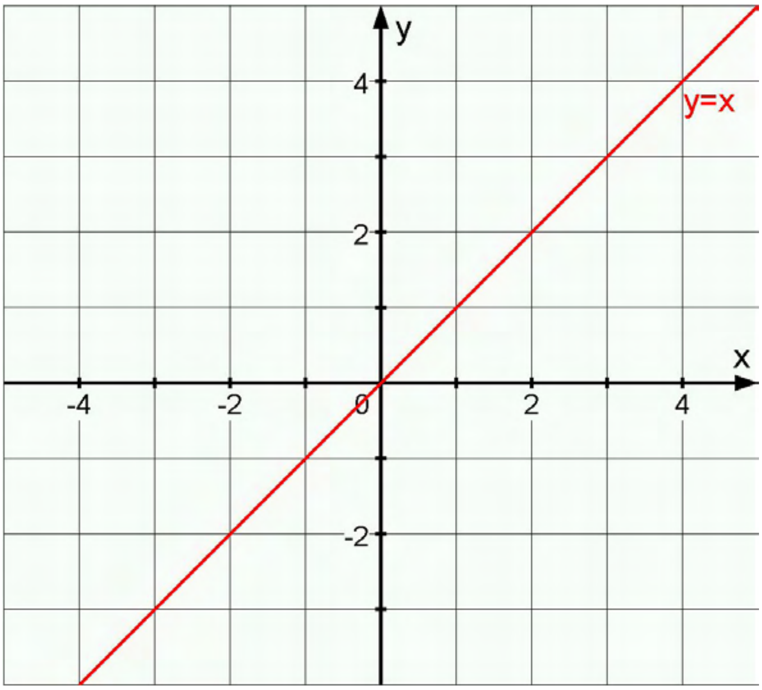
   (a) $\log_b x$ ist diejenige reelle Zahl, mit der man $b$ potenzieren muss, um $x$ zu erhalten. Damit ist die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
   Also gilt für den Wertebereich: $W =$ .............

   (b) Die Graphen der Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ gehen alle durch die Punkte $P_1 = (....; ....)$ und $P_2 = (....; ....)$.

   (c) Die Graphen der Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$

   - mit ............... sind streng monoton ...............;
   - mit ............... sind streng monoton fallend.

   (d) Der Graph der Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ hat die .... - Achse als Asymptote.




Zeichne hier die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = \log_2 x$

(e) Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln ($u, v, a > 0$; $a \neq 1$):

i. $\log_b(u \cdot v) =$ ........................

ii. $\log_b(\frac{u}{v}) =$ ........................

iii. $\log_b(u^r) =$ ........................

5. In einem Trockengebiet Afrikas wird ein Tiefbrunnen gebaut und Grundwasser gefördert. Messungen ergeben, dass die Grundwasservorräte dadurch von anfangs $0,08\,\mathrm{km}^3$ jedes Jahr um 2% im Vergleich zum Vorjahr sinken.

   (a) Erklären Sie kurz, warum für die Berechnung der restlichen Grundwassermenge $y\,\mathrm{km}^3$ nach $x$ Jahren folgende Gleichung gilt: $y = 0,08 \cdot 0,98^x$ ($G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$)

   (b) Wie viele Kubikmeter Wasser wurden im ersten Jahr gefördert?

   (c) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Grundwasservorrat auf die Hälfte der Anfangsmenge gesunken ist.

   (d) Durch einen zweiten Tiefenbrunnen verdoppelt sich die Abnahme des Grundwasservorrates auf 4% jeweils im Vergleich zum Vorjahr. Ermitteln Sie rechnerisch, wie viel Prozent der ursprünglichen Grundwassermenge in diesem Fall nach 50 Jahren noch vorhanden sind.

*Lösung:* (a) -.-

(b) $1600000\,\mathrm{m}^3$

(c) $34,31$ Jahre

(d) 12%