Mathematik • Torsten Warncke • Schulzentrum Neustadt

Umkehrung und Umkehrfunktion	*Datum*
Das Vertauschen von x und y	*11. Februar 2009*

1 Operation und Umkehr-Operation

Bei einer Funktion $y = f(x)$ werden bestimmte Operationen auf x angewandt, so dass zu jedem x aus der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ein y aus einer Wertemenge $\mathbb{W}$ zugeordnet wird. Die Umkehrfunktion $x = i(y)$ würde unter bestimmten Voraussetzungen aus dem y (aus $\mathbb{W}$) wieder genau ein x (aus $\mathbb{D}$) bestimmen.

Die Umkehr-Operation hebt die Wirkung der Operation auf, wenn wie im unteren Beispiel die Operation „verdoppeln“ durchgeführt wurde, so hebt die Umkehr-Operation „halbieren“ die Wirkung der Operation wieder auf, und man gelangt wieder zum ursprünglichen x.
Beispiele:

Operation	Beispiel	Umkehroperation	Beispiel
addieren	$y = x + 2$	subtrahieren	$x = y - 2$
multiplizieren	$y = x \cdot 2$	teilen (dividieren)	$x = y : 2$
quadrieren	$y = x^2$	Wurzel ziehen (radizieren)	$x = +\sqrt{y}$
potenzieren	$y = x^n$	n. Wurzel ziehen	$x = +\sqrt[n]{y}$
exponieren	$y = e^x$	logarithmieren	$x = \ln y$

Allgemein kommt man zur Umkehr-Operation indem man x und y vertauscht, und dann die Gleichung wieder nach x umstellt. Schauen wir uns dies am Beispiel des potenzierens noch einmal genauer an: Wenn $f(x)$ die Funktion ist, die zu jedem x die n. Potenz von x bildet, so lautet die Funktionsgleichung mit der Operation „potenzieren“:

1. $f(x) = x^n$, hierbei interpretieren wir $y = f(x)$ und schreiben erneut:
2. $y = x^n$, nun kommt der wesentliche Schritt der Umkehrung, nämlich das Vertauschen x mit y:
3. $x = y^n$, diese Art der Funktionsgleichung gilt natürlich **nicht** mehr für die Ursprungsfunktion $f(x)$, sondern jetzt für die Umkehrfunktion $i(x)$ von $f(x)$
4. $+\sqrt[n]{x} = y$ ergibt sich durch das n. Wurzelziehen (Radizieren) der getauschten Gleichung
5. $i(x) = +\sqrt[n]{x}$ wäre also die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

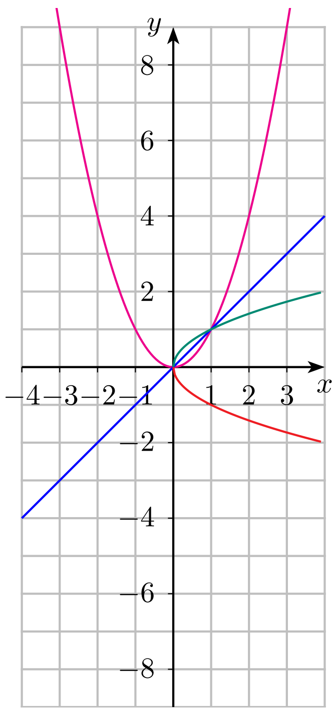
Wir wissen hierbei, dass bei geraden Exponenten, z.B. $n = 2$ (quadrieren), auch negative Argumente prinzipiell zu beachten sind. Damit eine Umkehrfunktion aber eine Funktion ist, d.h. eindeutige Funktionswerte liefert, müssen wir die Wertemenge der Umkehrfunktion künstlich einschränken. Ein Beispiel $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2$ liefert nach x aufgelöst: $x = \pm\sqrt{y}$, d.h. zu jedem y gibt es **zwei** x. Wenn wir nun für die Umkehrfunktion x und y vertauschen, hätten wir eigentlich $y = \pm\sqrt{x}$, was wegen dem $\pm$ aber **keine** Funktion wäre. Also wird es eine Funktion, wenn wir nur noch positive Werte zulassen: $i(x) = +\sqrt{x}$.

2 Umkehrfunktionen

Liegt eine Umkehrfunktion $i(x)$ vor, kann man ihren Graphen graphisch auch durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ des Graphen des Ursprungsgraphen $f(x)$ ermitteln.

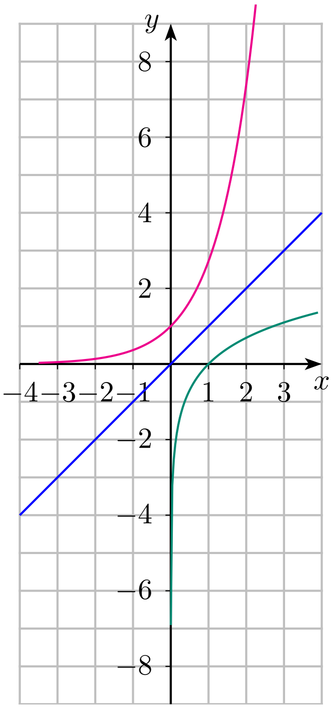
2.1 Beispiel: $f(x) = x^2$

1. Zeichne den Graphen der Funktion, z.B, $y = x^2$
2. Zeichne den Graphen der Winkelhalbierenden $y = x$
3. Führe eine Achsenspiegelung an dieser Winkelhalbierenden durch (z.B. durch geschicktes Knicken des Papieres, mit Spiegel, oder durch genaues Abmessen mit dem Geodreieck) und zeichne so die Umkehrfunktion $i(x)$. Für die Umkehrfunktion ist nur der positive Wurzelast zu gebrauchen, damit es sich um eine eindeutige Funktion handelt.



Die nebenstehende Zeichnung verdeutlicht den Zusammenhang der Graphen. Die Ausgangsfunktion $f(x) = x^2$ ist in der Farbe Magenta gezeichnet. Dann erkennt man die blaue Winkelhalbierende $y = x$. Und schließlich sind die beiden Wurzeläste dargestellt, die sich aus der Spiegelung von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden ergeben. Hiervon benutzen wir nur den oberen grünen Wurzelast $i(x) = +\sqrt{x}$, damit $i(x)$ auch tatsächlich eine Funktion ist, die jedem x eindeutig auch nur **ein** y zuordnet. Den roten unteren Wurzelast $-\sqrt{x}$, den wir auch aus der Spiegelung von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden erhalten würden, beachten wir nicht; er ist als Teil der Funktion verboten.

2.2 Weiteres Beispiel mit der Exponentialfunktion



Die nebenstehende Zeichnung verdeutlicht den Zusammenhang der Graphen. Die Ausgangsfunktion $f(x) = e^x$ ist in der Farbe Magenta gezeichnet. Die Exponentialfunktion nimmt ihr Argument x als Exponenten (Hochzahl). Dann erkennt man die blaue Winkelhalbierende $y = x$. Und schließlich ist die grüne Umkehrfunktion $i(x) = +\ln x$ dargestellt, die nur für positive $x > 0$ definiert ist. ln steht für Logarithmus naturalis, also sogenannter natürlicher Logarithmus. Er ist als Umkehrung der Exponentialfunktion notwendig. Eine Gleichung z.B. $e^x = 10$ kann nur mithilfe des Logarithmus naturalis nach x aufgelöst werden: $e^x = 10 \quad | \ln \qquad \Rightarrow \qquad \ln(e^x) = \ln 10 \quad \Rightarrow$ $x = \ln 10 \approx 2{,}302585092994045684017991454684$4.

Weitere Übungen zum Logarithmus finden sich z.B. unter:
http://www.warncke-family.de/fos/wachstum_brunnen.pdf
und ausführlich zum Bearbeiten über die Osterferien
http://www.warncke-family.de/fos/wachstum_ostern.pdf.

3 Ganz anschaulich

Der Preis ist in der Regel eine Funktion der gekauften Menge. Die Funktionsvorschrift könnte lauten: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x$, wenn f der Preis der gekauften Menge von z.B. Milch ist, jeder Liter 50 Cent kostet und x die Anzahl der gekauften Liter ist. Angenommen nun, ich war im Supermarkt und habe für 6 Euro Milch gekauft, weiß aber nicht mehr, wieviele Liter es waren. Diesmal muß ich also nicht mehr wie oben der (bekannten) Literzahl einen (noch unbekannten) Preis zuordnen, sondern umgekehrt einem (bekannten) Preis eine (noch unbekannte) Literzahl. Die entsprechende Umkehrfunktion wäre für dieses Beispiel $i(x) = 2 \cdot x$, wobei i nun aber die Litermenge und x der bezahlte Preis für die Milch ist. Wenn ich dann für $x = 6$ meine ausgegebene Geldsumme in die Umkehrfunktion eingebe erhalte ich die gekaufte Menge (12 Liter Milch).

URL dieses Dokumentes ist http://www.warncke-family.de/fos/umkehrfunktion.pdf.