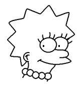
1 „Rattenschwanz ableiten“

Für viele ungeübte SuS entmutigend ist die Ableitung einer Funktion, die sich bei jedem Ableitungsschritt geradezu „aufbläht“ und immer neue Terme an ihren „Rattenschwanz“ hängt. Mit etwas Mut und Ausdauer ist es aber auch kein großes Ding, was anhand folgender Beispiele gezeigt wird:

1.1 $f(x) = (x^2 + 3x)^3$

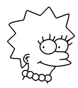
Wähle Kettenregel, $\square = x^2 + 3x$ und $n = 3$ für die Potenzregel, so folgt $f' = 3 \cdot (x^2 + 3x)^2 \cdot (x^2 + 3x)'$. Nach Summenregel ergibt sich dann: $f' = 3 \cdot (x^2 + 3x)^2 \cdot ((x^2)' + (3x)')$. Und schließlich nach Potenzregel haben wir die erste Ableitung von f: $f' = 3 \cdot (x^2 + 3x)^2 \cdot (2x + 3)$. Wer will kann dies noch umsortieren nach:



$$f'(x) = 3 \cdot x^2 \cdot (2x + 3) \cdot (x + 3)^2$$

Nun munter weiter mit der 2. Ableitung, der wir uns zunächst mit Faktor- und Produktregel nähern: $f'' = 3 \cdot (x^2 \cdot (2x+3) \cdot (x^2 + 3x)^2)'$. Für die Produktregel ($f' = u'v + uv'$) schleifen wir den Faktor 3 mit und wählen $u = x^2$, $u' = 2x$ (nach Potenzregel) und $v = (2x+3) \cdot (x^2+3x)^2$, d.h. v ist selbst ein Produkt (was soll's? ☺): $f'' = 3 \cdot ((2x \cdot (2x+3) \cdot (x^2+3x)^2) + x^2 \cdot ((2x+3) \cdot (x^2+3x)^2)')$. Nun packen wir das Produkt v an und leiten es selbstverständlich nach Produktregel ab: $v = u^\star \cdot v^\star$, mit $u^\star = 2x+3$, $u^{\star\prime} = 2$ (nach Potenzregel) und $v^\star = (x^2+3x)^2$. Das Zwischenergebnis nach Produktregel lautet: $f'' = 3 \cdot ((2x \cdot (2x+3) \cdot (x^2+3x)^2) + x^2 \cdot (2 \cdot (x^2+3x)^2) + (2x+3) \cdot ((x^2+3x)^2)')$. So, nun fehlt ja nur noch der letzte Ausdruck, den man fleißigerweise mit der Kettenregel erhält, mit $\square = x^2 + 3x$ und $n = 2$ für die Potenzregel:

$$f'' = 3 \cdot ((2x \cdot (2x+3) \cdot (x^2+3x)^2) + x^2 \cdot (2 \cdot (x^2+3x)^2) + (2x+3) \cdot (2 \cdot (x^2+3x) \cdot 2))$$



Fleißige Leute können dies nun noch zusammen fassen zu:

$$f''(x) = 6x \cdot (5x^3 + 30x^2 + 54x + 27)$$

Die dritte Ableitung ist deutlich einfacher, man kommt ohne Kettenregel aus, lediglich Faktor- ($c = 6$), Produkt- ($u = x$, $v = 5x^3 + 30x^2 + 54x + 27$) und Summen- und Potenzregel sind sinnvoll: $f''' = 6 \cdot (1 \cdot (5x^3 + 30x^2 + 54x + 27) + x \cdot (5x^3 + 30x^2 + 54x + 27)')$ $= 6 \cdot (5x^3 + 30x^2 + 54x + 27 + x \cdot (15x^2 + 60x + 54))$. Hier lässt sich fleißig einiges zusammen fassen und es ergibt sich:

$$f'''(x) = 6 \cdot (20x^3 + 90x^2 + 108x + 27)$$

Die nächsten Ableitungen sind jetzt nur noch ein Klacks:

$$f^{(4)}(x) = 72 \cdot (5x^2 + 15x + 9)$$

$$f^{(5)}(x) = 360 \cdot (2x + 3)$$

$$f^{(6)}(x) = 720$$

$$f^{(7)}(x) = 0$$

1.2 $f(x) = (2x^3 + 3x^2 + 5x + 7)^2$

Obwohl die Klammer hier nur quadriert wird müssen wir wiederum mit lästig vielen Termen rechnen. Empfohlen wird die Kettenregel, obwohl man mit der Produktregel annähernd schnell sein kann, $\square = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7$: $f' = 2 \cdot (2x^3 + 3x^2 + 5x + 7) \cdot (2x^3 + 3x^2 + 5x + 7)'$. Mit Summen- und Potenzregel ist der zweite Term schnell gefunden:

$$f' = 2 \cdot (2x^3 + 3x^2 + 5x + 7) \cdot (6x^2 + 6x + 5)$$

Für die zweite Ableitung führt kaum ein Weg an der Produktregel vorbei. Wähle zur Abwechslung einmal $u = 6x^2 + 6x + 5$ und $v = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7$ so folgt: $f'' = 2((12x + 6) \cdot (2x^3 + 3x^2 + 5x + 7) + (6x^2 + 6x + 5) \cdot (6x^2 + 6x + 5))$, was wegen u^2 schon wieder die Kettenregel in Erinnerung ruft. Diese brauchen wir jetzt aber gar nicht, denn mit ein wenig Algebra formen wir um zu:

$$f''(x) = 2 \cdot (60x^4 + 120x^3 + 174x^2 + 174x + 67)$$

Die nächsten Ableitungen sind bereits ein Klacks:

$$f'''(x) = 12 \cdot (40x^3 + 60x^2 + 58x + 29)$$
$$f^{(4)}(x) = 24 \cdot (60x^2 + 60x + 29)$$
$$f^{(5)}(x) = 1440 \cdot (2x + 1)$$
$$f^{(6)}(x) = 2880$$
$$f^{(7)}(x) = 0$$

In beiden Beispielen sind 7. und höhere Ableitungen Null. Dies liegt daran, dass sowohl $f(x) = (x^2 + 3x)^3$, wegen $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$, als auch $f(x) = (2x^3 + 3x^2 + 5x + 7)^2$, wegen $(2x^3)^2 = 4x^{3 \cdot 2} = 4x^6$, Polynome 6. Grades sind, deren 7. und höhere Ableitungen immer Null sind. Beide Beispiele ließen sich theoretisch und praktisch auch ohne Produkt- und Kettenregel lösen. Man muss aber befürchten, dass für das Ausmultiplizieren der Klammern ein Vielfaches der Arbeitszeit notwendig wäre.

2 $f(x) = \exp\left(-(2x+1)^2\right)$ als lange Kette ableiten

Dieses Beispiel lässt sich nicht elementar durch Ausmultiplizieren wie die obigen Beispiele ausrechnen, die Anwendung der Kettenregel macht Sinn! Außerdem soll hier die Möglichkeit angesprochen werden, das Ganze als „lange Kette“ zu rechnen: $f = g \circ h \circ \square$. Die entsprechende Kettenregel lautet $f' = g'(h) \cdot h'(\square) \cdot \square'$, die sich z.B. über Differenziale (siehe `http://www.warncke-family.de/fos/kasten_kettenreg.pdf`) begründen ließe. Die entsprechende Wahl der Funktionen wäre $\square = 2x + 1$, $h(x) = -x^2$, $g(x) = e^x$. Konsequentes Anwenden der Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = e^{-(2x+1)^2} \cdot (-2 \cdot (2x + 1)) \cdot (2)$$

Simples Umsortieren der Terme ergibt:

$$f'(x) = -4 \cdot (2x + 1) \cdot e^{-(2x+1)^2}$$

Nach den uns inzwischen bekannten Regeln können wir die 2. Ableitung bilden:

$$f''(x) = 8 \cdot (8x^2 + 8x + 1) \cdot e^{-(2x+1)^2}$$