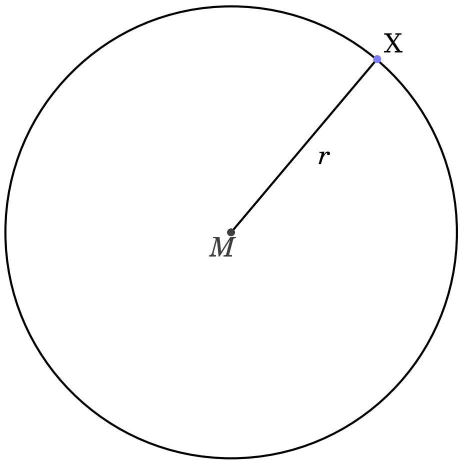
1 Die Kreisgleichung

Ein Kreis wird konstruiert, indem man um einen Punkt M eine Linie zieht (Schnur oder Zirkel), so dass diese überall den gleichen Abstand (Radius r) zu M hat. Der so konstruierte Kreis hat den Radius r und den Durchmesser $2 \cdot r$. Für Kreisberechnungen ist die Kreiszahl π bedeutsam: Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r$, Fläche $A = \pi \cdot r^2$, mit $\pi \approx 3{,}14159$. Mathematiker drücken die Definition wie folgt aus:
Def. des Kreises: Die Menge aller Punkte X einer Ebene, die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist die Kreislinie[1] k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r:

$k[M,r] = \{X | \overline{XM} = r\}$



$$\left|\overrightarrow{MX}\right| = r \tag{1}$$

$$|X - M| = r \tag{2}$$

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}\right| = r \tag{3}$$

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r \tag{4}$$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \tag{5}$$

[1] Nach dieser Definition ist ein Kreis eine eindimensionale, geschlossene Kurve, und keine zweidimensionale Fläche. Analog kann man die Kreisfläche als Menge aller Punkte der Ebene definieren, deren Abstand von M höchstens r ist: $\mathcal{K} = \{X | \overline{XM} \leq r\}$.

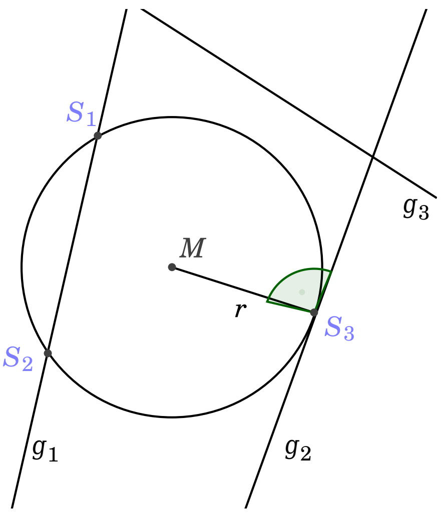
2 Alternative Formen der Kreisgleichung

$$\left[X - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^2 = r^2 \tag{6}$$

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = r^2 \tag{7}$$

3 Kreisschnitte

3.1 Kreis - Geraden



$$g_1 \cap k = \{S_1, S_2\} \tag{8}$$

$$g_1 \rightarrow \text{Sekante} \tag{9}$$

$$g_2 \cap k = \{S_3\} \tag{10}$$

$$g_2 \rightarrow \text{Tangente} \tag{11}$$

$$g_3 \cap k = \{\} \tag{12}$$

$$g_3 \rightarrow \text{Passante} \tag{13}$$

3.2 Methoden der Lagenbestimmung

Die Lage einer Geraden g zu einem Kreis k kann auf zwei Arten bestimmt werden:

- Abstandsbestimmung:

  Gegeben ist ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r und eine Gerade g. Zuerst wird ein Punkt P auf der Geraden gesucht. Diser ist, falls die Gerade in Vektorschreibweise gegeben ist, schon aus der Angabe heraus zu lesen, ansonst wird entweder der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ oder ein ersichtlicher, passender Punkt berechnet. Projeziert man nun den Vektor $\overrightarrow{PM}$ auf den normierten[2] Normalvektor der Geraden g so ergibt dies den Abstand d der Geraden g zum Mittelpunkt M des Kreises k. Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:

  - $d < r \Rightarrow g$: Sekante
  - $d = r \Rightarrow g$: Tangente
  - $d > r \Rightarrow g$: Passante

- Einsetzverfahren:

  Drückt man sich aus der Gleichung der Geraden g oder des Kreises k[3] eine Variable aus und setzt diese in die jeweils andere Geleichung ein. Als Ergebnis erhält man eine quadratische Gleichung deren Lösungsmöglichkeiten die Lagebeziehung beschreiben:

  - $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow g$: Sekante
  - $\exists x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow g$: Tangente
  - $\nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow g$: Passante

  Diese Methode hat den Vorteil, dass hier auch gleich die $x-$ bzw. $y-$ Koordinate(n) der Schnittpunkte berechnet werden.

[2] Als normierter Vektor wird ein Vektor mit Länge 1 bezeichnet

[3] Praktischerweise wird die Unbekannte aus der Geraden g ausgedrückt, da hier nicht mit Quadraten gerechnet werden muss