Die Kettenregel

Zwei Funktionen werden miteinander verkettet zu einer neuen Funktion $f = u \circ v$. Hierunter versteht man, dass die zweite Funktion v Argument der ersten Funktion u ist: $u(v)$. Wie sieht die Ableitung einer solchen verketteten Funktion aus?

Eine Ableitung ist bekanntlich definiert als $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \dfrac{df}{dx}$

Den Ausdruck $\frac{df}{dx}$ nennt man auch Differentialquotient, und df ein Differential. Wenn wir den Differentialquotienten um $d\square$ erweitern ergibt sich $\frac{df \cdot d\square}{dx \cdot d\square}$, laut Bruchrechnung lässt sich dies auch schreiben als $\frac{df}{d\square} \cdot \frac{d\square}{dx}$. Gekürzt wäre dies wieder der gesuchte Ausdruck $\frac{df}{dx}$. Die Kettenregel lautet also in der Form der Differentialquotienten: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\square} \cdot \frac{d\square}{dx}$. So reduziert sich komplexe Differentialrechnung auf Bruchrechnung. Ohne Differentiale hat die Kettenregel die folgende Form: Sei $f(x) = u(\square)$, wobei $\square$ eine Funktion von x ist: $\square(x)$:

$$f'(x) = u'(\square) \cdot \square'(x)$$

Betrachten wir das konkrete **Beispiel**

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Diese Funktion f nimmt ein x, quadriert es, packt ein Minuszeichen vor das Quadrat und nimmt das Ganze als Hochzahl für die Exponentialfunktion e^x. Müssen wir diese Funktion ableiten, haben wir mit Kettenregel eine gute Chance. Wählen wir geschickt die Funktion $\square(x) = -x^2$, so reduziert sich $f(x)$ auf $u(\square)$. Geschickt ist dies, weil u nun die simple Exponentialfunktion sein muss: $u(\square) = e^{\square}$. Die bemerkenswerte Eigenschaft der Exponentialfunktion ist die, dass sie mit allen ihren Ableitungen gleich ist, d.h. $u'(\square) = e^{\square}$. Nach Kettenregel ergibt sich:

$$f'(x) = u'(\square) \cdot \square'(x) = e^{\square} \cdot (-2 \cdot x)$$

Nicht vergessen, schließlich für $\square(x) = -x^2$ wieder einzusetzen und die gesuchte Ableitung ist

$$f'(x) = -2 \cdot x \cdot e^{-x^2}$$

Aufgabe: Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f(x) = (x+1)^3$.
Hinweise: Am schnellsten wendet man hier die Kettenregel[1] an, mit $\square = x + 1$:
$f'(x) = u'(\square) \cdot \square'(x) = 3 \cdot (x+1)^2 \cdot 1 = 3 \cdot (x+1)^2 = 3x^2 + 6x + 3$.
Unter Ausnutzung der Produktregel mit $\square''(x) = 0$ folgt: $f''(x) = u''(\square) \cdot \square'(x) = 2 \cdot 3 \cdot (x+1)^1 \cdot 1 = 6 \cdot (x+1)^1 = 6x + 6$.
Für die 2. Ableitung hätte man statt der Kettenregel auch mittels Binomi direkt summandenweise ableiten können. In jedem Fall lautet das Ergebnis: $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ und $f''(x) = 6x + 6$.
Aufgabe: Kontrollieren Sie dieses Ergebnis auch mittels Produktregel und alternativ durch Ausmultiplizieren der Klammern.

[1] Wir wählen als Funktion u diejenige Funktion, die ihr Argument kubiert: $u: \quad x \mapsto x^3$.