1 Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Die gesuchten Nullstellen werden im Buch Jonczyk (orange), S. 9, Nr. 4.a) mittels Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle $x_1 = -2$ bestimmt. Im Einzelnen:

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$\left(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \right) : \left(x + 2 \right) =$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$\Big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\Big) : \Big(x + 2\Big) = x^2$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x + 2\big) = x^2 \\
\underline{-\, x^3 - 2x^2}
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x + 2\big) = x^2 \\
\underline{\;-\, x^3 - 2x^2\;} \\
\qquad\quad -\, 4x^2 - 5x
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x + 2\big) = x^2 - 4x \\
\underline{-\, x^3 - 2x^2} \\
\qquad -\, 4x^2 - 5x
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x + 2\big) = x^2 - 4x \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad -\,4x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{\quad 4x^2 + 8x}
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x + 2\big) = x^2 - 4x \\
\quad \underline{-\, x^3 - 2x^2} \\
\qquad\qquad \;\; -\, 4x^2 - 5x \\
\qquad\qquad\quad\;\; \underline{4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3x + 6
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \right) : \left(x + 2 \right) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-\, x^3 - 2x^2} \\
\qquad -\, 4x^2 - 5x \\
\qquad \underline{\quad 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\quad 3x + 6
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x + 2\big) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad -\,4x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{\quad 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,3x - 6}
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x+2\big) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-\, x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad -\, 4x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{\quad 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\, 3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Polynom-Division Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x+2\big) = x^2 - 4x + 3 & \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & \\
-\,4x^2 - 5x \qquad & \\
\underline{4x^2 + 8x} \qquad & \\
3x + 6 & \\
\underline{-\,3x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Alternativ mit dem Horner-Schema:

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion

$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion

$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}
$$

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion

$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 \nearrow^{\cdot(-2)} & & &
\end{array}
$$

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion

$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & -2\,+ & & \\
\hline
 & 1 & -4 & & \\
\end{array}
$$

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion

$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & -2 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -4 & &
\end{array}
$$

$\cdot(-2)$

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion

$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8\,+ & \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \end{array}$$

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion

$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & -2 & 8 & -6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 \xrightarrow{\cdot(-2)} &
\end{array}
$$

4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion $f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6+ \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \color{red}{0} \end{array}$$

Das Horner-Schema zeigt also, dass für $\color{blue}{x_1 = -2}$ eine Nullstelle vorliegt und dass der Quotient (Ergebnis der Division) dann $1 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3$ lautet.

Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

mit klassischer Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x + 2\big) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ \qquad -4x^2 - 5x \\ \qquad \underline{\ \ 4x^2 + 8x} \\ \qquad\qquad\quad 3x + 6 \\ \qquad\qquad \underline{-3x - 6} \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

Sowohl mit klassischer Polynomdivision als auch mittels Horner-Schema resultiert das Ergebnis $x^2 - 4 \cdot x + 3$, dessen Nullstellen mittels pq-Formel bestimmt werden: $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$, d.h. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_1 = 3$

4.e)

Buch Jonczyk (orange), S.9, Nr. 4. e) Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle $\color{blue}{x_1 = 2}$:

$$\begin{array}{cccc} (x^3 + x^2 & -16x + 20) & : (x - \color{blue}{2}) = & x^2 + 3x - 10 \\ -(x^3 - 2x^2) & & & \\ \hline +3x^2 & -16x & & \\ -(+3x^2 & -6x) & & \\ \hline & -10x + 20 & & \\ & -(-10x + 20) & & \\ \hline & \underline{\underline{0}} & & \end{array}$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung $x^2 + 3x - 10 = 0$, die sich mit pq zu $x_{2,3} = -1{,}5 \pm 3{,}5$ ergibt. Die Nullstellen sind also $x_{1,2} = 2$ (doppelte Nullstelle) und $x_3 = -5$.

4.f)

Nr. 4. f) Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle $x_1 = -3$, wobei man sich jetzt hier wieder die Klammern beim Abziehen spart:

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad 4x^3 + 27x^2 + 54x + 27 \big) : \big(x+3\big) = 4x^2 + 15x + 9 \\
\underline{-\,4x^3 - 12x^2} \qquad\qquad\qquad & \\
15x^2 + 54x \qquad\quad & \\
\underline{-\,15x^2 - 45x} \qquad\quad & \\
9x + 27 & \\
\underline{-\,9x - 27} & \\
0 &
\end{array}
$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung $4x^2 + 15x + 9 = 0$, die in Normalform zu $x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} = 0$ wird und mit pq zu $x_{2,3} = -\frac{15}{4} \pm \frac{9}{4}$ gelöst wird. Die Nullstellen sind also $x_{1,2} = -3$ (doppelte Nullstelle, mögliche Extremstelle) und $x_3 = -0{,}75$.

4.g)

Nr. 4. g) Zunächst wird auf die Gleichung $4x^4 - 8x^3 - 37x^2 + 20x = 0$ umgestellt. Dann erkennt man, dass man $x = 0$ ausklammern kann, dass also $x_1 = 0$ eine Nullstelle ist. Schließlich machen wir Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle $x_2 = 4$

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad 4x^3 \;\; - 8x^2 - 37x + 20 \big) : \big(x-4\big) = 4x^2 + 8x - 5 \\
\underline{-\,4x^3 + 16x^2} \qquad\qquad\qquad & \\
8x^2 - 37x \qquad\quad & \\
\underline{-\,8x^2 + 32x} \qquad\quad & \\
-\,5x + 20 & \\
\underline{5x - 20} & \\
0 &
\end{array}
$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung $4x^2+8x-5 = 0$, die in Normalform zu $x^2 + 2x - \frac{5}{4} = 0$ wird und mit pq zu $x_{3,4} = -1 \pm \frac{3}{2}$ gelöst wird. Die Nullstellen sind also $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2{,}5$ und $x_4 = 0{,}5$.

4.h)

Nr. 4. h) Zunächst wird auf die Gleichung $x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = 0$ umgestellt. Dann erkennt man, dass man $x = 0$ ausklammern kann, dass also $x_1 = 0$ eine Nullstelle ist. Schließlich machen wir Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle $x_2 = -1$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + x^2 - 2x - 2\big) : \big(x+1\big) = x^2 - 2 \\
\underline{-\, x^3 - x^2} \\
\qquad\qquad -\, 2x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{\quad 2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung $x^2 - 2 = 0$, die sofort die Nullstellen $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$ liefert. Zum Zeichnen näherungsweise sind die drei Nullstellen also $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 \approx 1{,}4$ und $x_4 \approx -1{,}4$.

4.i)

Nr. 4. i) Zunächst wird auf die Gleichung $x^5 + 3x^4 - x - 3 = 0$ umgestellt. Leider lässt sich hier nix ausklammern. Also machen wir Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle $x_1 = -3$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^5 + 3x^4 - x - 3\big) : \big(x+3\big) = x^4 - 1 \\
\underline{-\, x^5 - 3x^4} \\
\qquad\qquad -\, x - 3 \\
\qquad\qquad \underline{\quad x + 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das Ergebnis der Division führt zur biquadratischen Gleichung $x^4 - 1 = 0$, die sofort die Nullstellen $x_{2,3} = \pm 1$ liefert. Also haben wir hier nur drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 1$.

5.j

Wir können sofort eine Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle $x_1 = -2$ durchführen:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^5 + 2x^4 + x + 2\big) : \big(x+2\big) = x^4 + 1 \\
\underline{-\, x^5 - 2x^4} \\
\qquad\qquad\quad x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\, x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das Ergebnis der Division führt zur biquadratischen Gleichung $x^4 + 1 = 0$, die gar keine Nullstellen hat. Also haben wir hier nur die Nullstelle $x_1 = -2$.

2 Zusatzaufgaben

Macht die „Freiwilligen Übungaufgaben zur Polynomdivision“ falls ihr weiter unsicher seid:
`http://www.warncke-family.de/fos/übg_Polynomdivision_I.pdf`.