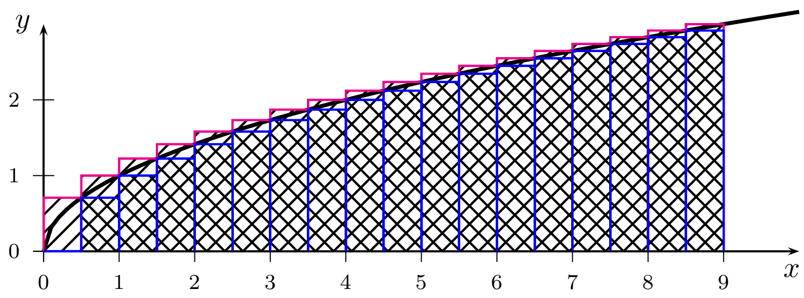
Mathematik • Warncke • Schulzentrum Neustadt	
Riemannsche Ober- und Untersummen	*Datum*
Integralrechnung — FOS 12c	*11. Februar 2009*

Schon vor 300 Jahren hatte man Kurven gezeichnet und wollte nun wissen, wie groß die Fläche unter so einer Kurve (Funktion) ist. Die Idee der Berechnung von Flächen mittels Zerlegung in Rechtecke und Bildung von Ober- und Untersummen kann sogar auf Archimedes (ca. 200 v.Chr.) zurück geführt werden. Bernhard Riemann (1854) hat die Zerlegung perfektioniert: Man zerlegt die Fläche in rechteckige Streifen gleicher Breite die unter der Kurve enden und addiert die Flächeninhalte der Streifen. Diese Summe heißt Riemannsche Untersumme und ist etwas kleiner als die gesuchte Fläche. Dann zerlegt man die Fläche noch mal in gleich breite Streifen, aber man lässt sie weiter oben enden. Hier hat man etwas zu viel. Diese Summe heißt Riemannsche Obersumme. Wählt man nun schmalere Streifen, so wird die Genauigkeit größer und die beiden Werte von Ober- und Untersumme nähern sich an.

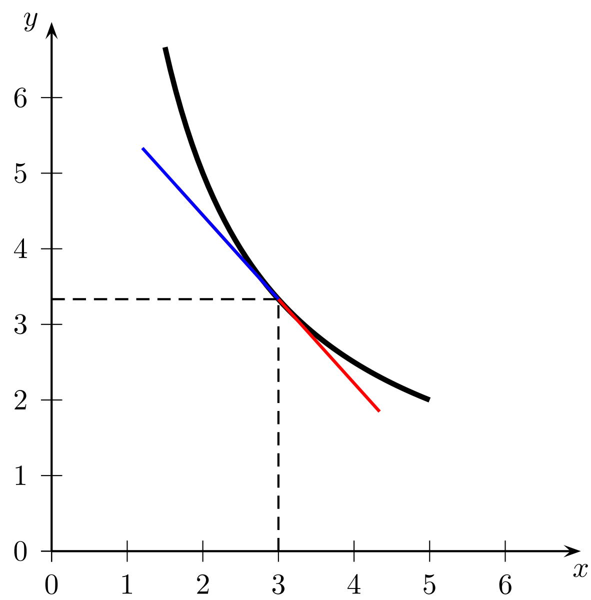
Betrachten wir irgendeine einfache Funktion, z.B. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, und berechnen die Fläche unter der Kurve dieser Funktion mit der x-Achse im Riemannschen Sinne mittels Ober- (magenta) und Untersummen (blau) im Bereich von $x = 0$ bis $x = b = 9$:



Wenn man in einem Grenzübergang die Breite der Rechtecke Δx (oben im Bild $\Delta x = \frac{1}{2}$) immer kleiner werden lässt, so ergibt die Summe der dann unendlich vielen Rechtecke der Breite dx genau die gesuchte Fläche unter der Kurve: $A = \int_0^b \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} = 18$.

Die Rechteckchen spielen eine ähnliche Hilfs-Rolle in der Integralrechnung wie die Sekanten in der Differentialrechnung, die sich per Grenzübergang in Tangenten überführen lassen, auch hier geht die Breite des Abstandes Δx der Sekantenpunkte gegen Null:

Die Steigung der Tangente im Berührpunkt, hier an der Stelle $x = 3$, ist dann genau die Steigung der Funktion an der Stelle 3, also $f'(3)$.



URL dieses Lösungsblatts: `http://www.warncke-family.de/fos/integral_f2.pdf`