1 Hausaufgabe zum 11.11.2010

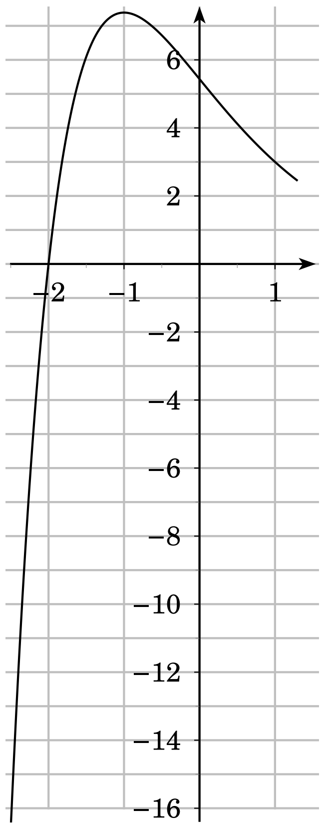
Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = (2+x)\cdot e^{1-x}$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrema und die Wendetangente. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $-2{,}5 \le x \le 1$.

1.1 Skizze

Der `Casio fx-911ES` eignet sich gut zum „Schummeln“ der Kurvendiskussion. Da es die Lehrer i.d.R. nicht krumm nehmen, wenn wir als erstes die Skizze erstellen (und ggf. zum Schluss die markanten, bestimmten Punkte in die Skizze hinein tun), ist es schlau, genau dies zu tun. Wir haben dann nämlich etwas zum Spicken, und können kontrollieren, ob die später errechneten T, H oder W wirklich Sinn machen. Gesagt, getan: der `Casio fx-911ES` macht für uns die Arbeit (`MODE 7, Start -2.5, End 1, Step .5`):

x	$f(x)$
-2,5	-16,55
-2	0
-1,5	6,09
-1	7,39
-0,5	6,72
0	5,44
0,5	4,12
1	3

Und schon haben wir die Skizze:



❁ ❁

1.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

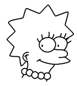
Die y-Achse ist bei $x = 0$, $f(0) = (2+0)\cdot e^{1-0} = 2e \approx 5{,}44 \Rightarrow Y(0\,|\,5{,}44)$ ist der Schnittpunkt mit der y-Achse. Die x-Achse ist bei $y = 0$, $0 = (2+x_N)\cdot e^{1-x_N} \Rightarrow x_N = -2$, denn die e-Funktion wird nie Null, so dass „nach EPiNweFNi“ $2+x = 0$ zur einzigen Nullstelle führt: $N(-2\,|\,0)$.

❁ ❁

1.3 Extrema

NB für Extrema ist $f'(x_E) = 0$. Wir bilden $f'(x)$ mittels Produkt- und Kettenregel. Produktregel: $f(x) = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$. $f(x) = (2+x)\cdot e^{1-x}$, also $u = 2+x$, $v = e^{1-x}$, $u'(x) = 1$, aber was ist $v'(x)$? Die Lösung folgt aus der Kettenregel: $f(x) = f(\square(x)) \Rightarrow f'(x) = f'(\square)\cdot \square'(x)$ mit f als e-Funktion und $\square = \boxed{1-x}$. Dann ist $\square'(x) = -1$ und schließlich $v'(x) = -1\cdot e^{1-x}$, denn „e hoch Wurst gibt abgeleitet nach Wurst: e hoch Wurst“.

Fassen wir zusammen: $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + (2+x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x} \cdot (1-2-x) = (-1-x) \cdot e^{1-x}$. Da die e-Funktion nie Null wird, folgt für die Extremstelle nach „EPiNweFNi“ $0 = (-1-x_E) \Rightarrow x_E = -1$. Einsetzen in die 2. Ableitung f'' und in die Ausgangsfunktion f ist zusätzlich hinreichend für die Bestimmung des Extremums. Wir bilden $f''(x)$ mittels Produkt- und Kettenregel analog zu f': $f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (-1-x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x} \cdot (-1+1+x) = x \cdot e^{1-x}$, $f''(-1) = -1 \cdot e^{1+1} = -e^2 < 0$ ☹ Es liegt bei $x_E = -1$ also ein Hochpunkt vor. $f(-1) = (2-1) \cdot e^{1+1} = e^2 \approx 5{,}44$ (vgl. WT, 1.1), also $H(-1\,|\,5{,}44)$.



1.4 Wendetangente

Für die Wendetangente benötigen wir zunächst den Wendepunkt, um dort eine Tangente anzulegen. NB für W ist $f''(x) = 0$, wegen EPinweFni folgt $x_W = 0$. Zur Überprüfung brauchen wir die 3. Ableitung, denn $f'' = 0$ und $f''' \neq 0$ ist hinreichend für einen Wendepunkt. $f'''(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = (1-x) \cdot e^{1-x}$ nach Produkt- und Kettenregel, $f'''(0) = (1-0) \cdot e^{1-0} = e \neq 0$, also ist $W = Y(0\,|\,5{,}44)$ der Wendepunkt (vgl. WT 1.1, und 1.2). Steigung und Berührpunkt stimmen zwischen Tangente und Graph der Funktion überein: $m = f'(0) = (-0-1) \cdot e^{1-0} = -e \approx -2{,}72$ setzen wir in die Gleichung für den Wendepunkt ein: $5{,}44 \approx 2e = mx + b = -e \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2e \approx 5{,}44$. Die Gleichung der Wendetangente lautet also: $t(x) = -e \cdot x + 2e \approx -2{,}72 \cdot x + 5{,}44$. Fertig