Musterlösung	*Datum*
Analysis I - Kurvendiskussion FOS 12c	*04.12.2007*

1 Spezialfall $f(x) = x^4$

1.1 Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, weil jede ganzrationale Funktion (Polynom) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

1.2 Symmetrie

Y-Achsensymmetrie (YAS), da nur ein gerader Exponent (4) auftaucht.

1.3 Schnittpunkte mit den Achsen

1.3.1 x-Achse, also Nullstellen

$x_N^4 = 0$, also ist $x_{N1-4} = 0$ die einzige Nullstelle, $N_{1-4}(0|0)$.

1.3.2 y-Achse, also „Y-Achsenabschnitt“

$f(0) = 0^4 = 0$, also $Y(0|0)$.

1.4 Verhalten im Unendlichen

entfällt.

1.5 Ableitungen

$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$.

1.6 Monotonieverhalten

entfällt.

1.7 Extrema

Notw. Bed. $f'(x_E) = 0$, also $4x_E^3 = 0$, d.h. $x_{E1-3} = 0$. Notwendig und hinreichend wäre $f'(0) = 0$ und $f''(x_{E1-3}) \neq 0$, aber $f''(0) = 0$. In diesem Fall schaut man sich das Paar der nächsthöheren

Ableitungen an: $f'''(0) = 0$ und $f''''(0) = 24 \neq 0$. Wegen $f''''(0) = 24 > 0$ ☺ liegt bei $x = 0$ ein Minimum vor: $T(0|0)$, da dort auch die Nullstelle ist. Alternativ zeigt man mit dem Vorzeichenwechselkriterium (VZW), dass ein Tiefpunkt vorliegt, denn $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von $-$ nach $+$ bei $x_E = 0$. Es gibt keine weiteren Extrema.

1.8 Wendepunkte

Notw. Bed. $f''(x_W) = 0$, also $12x_W^2 = 0$, d.h. $x_{W1,2} = 0$. Notwendig und hinreichend wäre $f''(0) = 0$ und $f'''(x_{W1,2}) \neq 0$, aber $f'''(0) = 0$. Die nächsthöheren Ableitungen belegen, dass kein Wendepunkt existiert, denn $f''''(0) = 24 \neq 0$ und alle höheren Ableitungen sind Null. Außerdem wurde zuvor gezeigt, dass $T(0|0)$ ein Tiefpunkt ist, und ein Extrempunkt kann definitionsgemäß nicht gleichzeitig Wendepunkt sein.

1.9 Zeichnung

Erstellt man am einfachsten zuhaus mit `FunkyPlot`.

2 Aufgabe 1.e) $f(x) = x^4 - 6x^2$

2.1 Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, weil jede ganzrationale Funktion (Polynom) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

2.2 Symmetrie

YAS, da nur gerade Exponenten (2,4) auftauchen.

2.3 Schnittpunkte mit den Achsen

2.3.1 x-Achse, also Nullstellen

$x_N^4 - 6x_N^2 = x_N^2(x_N^2 - 6) = 0$, also sind $x_{N1,2} = 0$ und $x_{N3,4} = \pm\sqrt{6}$ die Nullstellen, $N_{1,2}(0|0)$, $N_{3,4}(\pm\sqrt{6}|0)$. Zum Zeichnen gilt näherungsweise $x_{N3,4} \approx \pm 2,4$.

2.3.2 y-Achse, also „Y-Achsenabschnitt“

$f(0) = 0$, also $Y(0|0)$.

2.4 Verhalten im Unendlichen

entfällt.

2.5 Ableitungen

$f'(x) = 4x^3 - 12x$, $f''(x) = 12x^2 - 12$, $f'''(x) = 24x$.

2.6 Monotonieverhalten

entfällt.

2.7 Extrema

Notw. Bed. $f'(x_E) = 0$, also $4x_E^3 - 12x_E = 4x_E(x_E^2 - 3) = 0$, d.h. $x_{E1} = 0$, und $x_{E2,3} = \pm\sqrt{3}$. Notwendig und hinreichend wäre $f'(0) = 0$ und $f''(x_{E1-3}) \neq 0$. $f''(0) = -12 < 0$ ☹ Also liegt bei $x_{E1} = 0$ ein Maximum vor: $H(0|0)$.

$f''(\pm\sqrt{3}) = 12(\pm\sqrt{3})^2 - 12 = 36 - 12 = 24 > 0$ ☺ Also liegen bei $x_{E2,3} = \pm\sqrt{3}$ Minima vor: $f(x_{E2,3}) = (\pm\sqrt{3})^4 - 6((\pm\sqrt{3})^2 = 9 - 18 = -9$, also sind die Tiefpunkte $T_{2,3}(\pm\sqrt{3}| - 9)$, wegen YAS. Zum Zeichnen gilt näherungsweise $x_{E2,3} \approx \pm 1,7$.

2.8 Wendepunkte

Notw. Bed. $f''(x_W) = 0$, also $12x_W^2 - 12 = 12(x_W^2 - 1) = 0$, d.h. $x_{W1,2} = \pm 1$. Notwendig und hinreichend wäre $f''(\pm 1) = 0$ und $f'''(x_{W1,2}) \neq 0$, und tatsächlich ist $f'''(\pm 1) = \pm 24 \neq 0$. Also liegen 2 Wendepunkte vor: $f(\pm 1) = (\pm 1)^4 - 6(\pm 1)^2 = -5$, $W_{1,2}(\pm 1| - 5)$, wegen YAS.

2.9 Zeichnung

Erstellt man am einfachsten zuhaus mit `FunkyPlot`.

3 Aufgabe 1.g) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4$ (`HA`)

3.1 Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, weil jede ganzrationale Funktion (Polynom) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

3.2 Symmetrie

Weder OPS noch YAS, da sowohl gerade Exponenten (4) als auch ungerade Exponenten (5) auftauchen.

3.3 Schnittpunkte mit den Achsen

3.3.1 x-Achse, also Nullstellen

$\frac{1}{20}x_N^5 + \frac{1}{4}x_N^4 = \frac{1}{20}x_N^4(x_N + 5) = 0$, also sind $x_{N1-4} = 0$ und $x_5 = -5$ die Nullstellen, $N_{1-4}(0|0)$, $N_5(-5|0)$.

3.3.2 y-Achse, also „Y-Achsenabschnitt“

$f(0) = 0$, also $Y(0|0)$.

3.4 Verhalten im Unendlichen

entfällt.

3.5 Ableitungen

$f'(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$, $f''(x) = x^3 + 3x^2$, $f'''(x) = 3x^2 + 6x$.

3.6 Monotonieverhalten

entfällt.

3.7 Extrema

Notw. Bed. $f'(x_E) = 0$, also $\frac{1}{4}x_E^4 + x_E^3 = \frac{1}{4}x_E^3(x_E + 4) = 0$, d.h. $x_{E1-3} = 0$, und $x_{E4} = -4$. Notwendig und hinreichend wäre $f'(0) = 0$ und $f''(x_{E1-4}) \neq 0$, aber $f''(0) = 0$. In diesem Fall schaut man sich das Paar der nächsthöheren Ableitungen an: $f'''(0) = 0$ und $f''''(0) = 6 \neq 0$. Wegen $f''''(0) = 6 > 0$ ☺ liegt bei $x = 0$ ein Minimum vor: $T_{1-3}(0|0)$. Alternativ zeigt man auch hier mit VZW: $f' : \ominus \to \oplus \Rightarrow$ Tiefpunkt.

$f''(-4) = (-4)^3 + 3(-4)^2 = -64 + 3 \cdot 16 = -16 < 0$ ☹ Also liegt bei $x_{E4} = -4$ ein Maximum vor: $f(-4) = \frac{1}{20}(-4)^5 + \frac{1}{4}(-4)^4 = -51,2 + 64 = 12,8$, der Hochpunkt ist $H(-4|12,8)$.

3.8 Wendepunkte

Notw. Bed. $f''(x_W) = 0$, also $x_W^3 + 3x_W^2 = x_W^2(x_W + 3) = 0$, d.h. $x_{W1,2} = 0$ und $x_{W3} = -3$

Notwendig und hinreichend wäre $f''(x_{W1-3}) = 0$ und $f'''(x_{W1-3}) \neq 0$, und tatsächlich ist $f'''(-3) = 27 + 18 \neq 0$. Aber bei $x_{W1,2} = 0$ können keine Wendepunkte vorliegen, weil dort ja ein Minimum liegt. Also $f(-3) = \frac{1}{20}(-3)^5 + \frac{1}{4}(-3)^4 = \frac{1}{20}(-3)^4 \cdot (-3 + 5) = 8,1$, d.h. $W(-3|8,1)$ ist der Wendepunkt.

3.9 Zeichnung

Erstellt man am einfachsten zuhaus mit `FunkyPlot`.