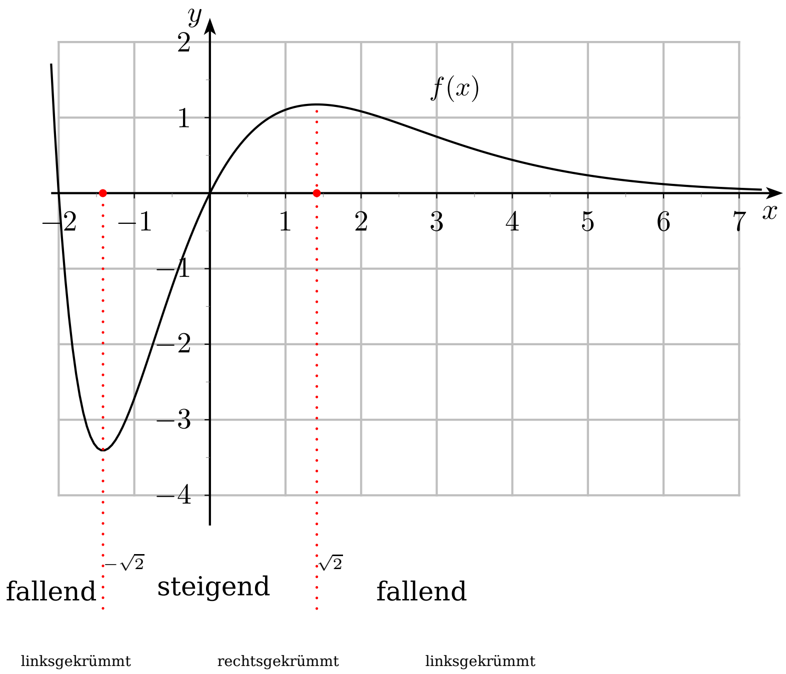
1 Die Funktion $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x)$

1.1 Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x)$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Monotonie und Krümmung. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Lösungshinweise:
Ableitungen: $f'(x) = -e^{-x} \cdot (x^2 - 2)$ und $f''(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 2x - 2)$,
Graph:



2 $f(x) = 5x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

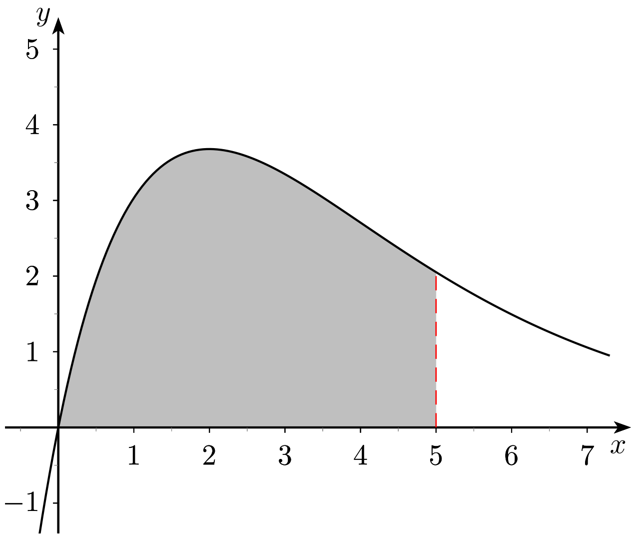
2.1 Gegeben sei die Funktion $f(x) = 5x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

- Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
- Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade $x = 5$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

Lösungshinweise:

1. Nullstellen $x = 0$
2. Ableitung $f'(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - \frac{x}{2})$
3. Extrema: $H(2|\frac{10}{e})$, f monoton steigend für $x < 2$, f monoton fallend für $x > 2$
4. Wendepunkte: $W(4|\frac{20}{e^2})$, f rechtsgekrümmt für $x < 4$, f linksgekrümmt für $x > 4$,

Die gesuchte Fläche lässt sich mit partieller Integration berechnen als
$A = 5 \cdot \int_0^5 xe^{-\frac{x}{2}} dx = 5 \cdot [-2e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x+2)]_0^5 = 10(2 - \frac{7}{e^{2,5}}) \approx 14{,}25$.



3 Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4 - 8x) \cdot e^{2x}$

Die Funktion beschreibt den Bestand einer aussterbenden Tierpopulation.

1. Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. (zur Kontrolle: $f'(x) = -16xe^{2x}$)
2. Wie ist a zu wählen, damit $F(x) = 4e^{2x} - ax \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von f ist?
3. Skizzieren Sie die 1. Ableitung von f ohne schriftliche Berechnungen durchzuführen. (neues Koordinatensystem).
4. Berechnen Sie exakt (ohne Taschenrechner) den Inhalt der (zu einer Seite unbegrenzten) Fläche, die der Graph von f mit dem Graphen von $g(x) = e^{2x}$ einschließt.

<u>Lösungshinweise:</u>

1. $N(\frac{1}{2}|0)$, $H(0|4)$, $W(-\frac{1}{2} \mid \frac{8}{e})$ Monotonie: f für $x < 0$ monoton wachsend, f für $x > 0$ monoton fallend
2. $a = 4$
3. siehe Graph von f
4. Schnittbedingung: $f(x) = g(x)$