FOS — MUSTERLÖSUNG	*Datum*
Test — Kurvendiskussion und Flächenberechnung	*Jan. 2009*

1 Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f(x) = (x+1)^3$.

Am schnellsten wendet man hier die Kettenregel an, mit $\Box = \boxed{x+1}$: $f'(x) = g'(\Box)\cdot(\Box)'(x) = 3\cdot(x+1)^2\cdot 1 = 3\cdot(x+1)^2 = 3x^2+6x+3$. $f''(x) = g''(\Box)\cdot(\Box)'(x) = 2\cdot 3\cdot(x+1)^1\cdot 1 = 6\cdot(x+1)^1 = 6x+6$. Für die 2. Ableitung hätte man statt der Kettenregel auch mittels Binomi direkt summandenweise ableiten können. In jedem Fall lautet das Ergebnis: $f'(x) = 3x^2+6x+3$ und $f''(x) = 6x+6$.

2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4-8x)\cdot e^{2x}$.

2.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Der Schnittpunkt mit der y–Achse liegt an der Stelle $x_y = 0$; einsetzen führt zum Schnittpunkt $Y(0|4)$, da $y(0) = (4-8\cdot 0)\cdot e^0 = 4$. Schnittpunkte mit der x–Achse nennt man gewöhnlich Nullstellen. Sie sind Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Da ein Exponentialterm e^x nie Null wird, sind die Nullstellen Lösungen der folgenden Gleichung des anderen Faktors $(4-8x_N) = 0$ (EPiNweFNi). Also ist $x_N = \frac{1}{2}$ die einzige Nullstelle von $f(x)$ und $N(\frac{1}{2}|0)$ ist der Schnittpunkt mit der x–Achse.

2.2 Bestimmen Sie etwaige Extrempunkte.

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist $f'(x_E) = 0$. Die erste Ableitung bilden wir nach der Produktregel: $f'(x) = u'v + uv' = -8e^{2x} + (4-8x)\cdot 2\cdot e^{2x} = -16\cdot x\cdot e^{2x}$. Da ein Exponentialterm e^x nie Null wird, sind die Nullstellen Lösungen der folgenden Gleichung des anderen Faktors $-16\cdot x_E = 0$. Für $x_E = 0$ ist die Gleichung erfüllt. Hinreichend für ein Maximum wäre $f''(x_E) < 0$. Die zweite Ableitung bilden wir nach der Produktregel: $f''(x) = u'v+uv' = -16e^{2x} + (-16x)\cdot 2\cdot e^{2x} = -16(2x+1)\cdot e^{2x}$. Einsetzen von $x_E = 0$ ergibt $f''(0) = -16 < 0$, es liegt also tatsächlich ein Maximum vor $H(0|4)$. Den y–Wert des Maximums hatten wir zuvor berechnet, da $H = Y$.

2.3 Bestimmen Sie etwaige Wendepunkte.

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist $f''(x_W) = 0$. Die zweite Ableitung hatten wir zuvor gebildet: $f''(x) = u'v + uv' = -16e^{2x} + (-16x)\cdot 2\cdot e^{2x} = -16(2x+1)\cdot e^{2x}$. Da ein Exponentialterm e^x nie Null wird, sind die Nullstellen Lösungen der folgenden Gleichung des anderen Faktors $(2x_W + 1) = 0$ (EPiNweFNi). Also ist $x_W = -\frac{1}{2}$ mögliche Wendestelle. Hinreichend für den Wendepunkt ist, dass $f'''(x_W) \neq 0$. Die dritte Ableitung bilden wir nach der Produktregel: $f'''(x) = u'v + uv' = -32e^{2x} - 16(2x+1)\cdot 2\cdot e^{2x} = -64(x+1)\cdot e^{2x}$. Einsetzen von $x_W = -\frac{1}{2}$ ergibt $f'''(x_W) = -64(\frac{1}{2})e^{-1} = \frac{-32}{e} \neq 0$, es liegt also tatsächlich ein Wendepunkt vor, $W(-\frac{1}{2}|\frac{8}{e})$. Den y-Wert des Wendepunktes berechnen wir durch Einsetzen von x_W in $f(x)$: $f(x_W) = (4-8\cdot(-\frac{1}{2}))\cdot e^{2\cdot(-\frac{1}{2})} = (4+4)\cdot e^{-1} = \frac{8}{e} \approx 2{,}94$. Für die Zeichnung nehmen wir also $W(-0{,}5|2{,}94)$.

2.4 Zeigen Sie, dass $F(x) = (1-x) \cdot 4e^{2x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Damit $F(x)$ eine Stammfunktion ist, reicht es zu zeigen, dass gilt $F'(x) = f(x)$. Die erste Ableitung bilden wir nach der Produktregel: $F'(x) = u'v + uv' = -4e^{2x} + (4-4x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = (4-8x) \cdot e^{2x} = f(x)$. Also ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

2.5 Berechnen Sie die Schnittfläche von $f(x)$ mit einer Geraden.

Damit sich eine Schnittfläche ergibt, muss es mindestens zwei Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$ geben: $f(x) = g(x)$. $g(x) = 4-8x$ ist nichts anderes als ein Faktor von $f(x)$, d.h. beide Funktionen haben die gleiche Nullstelle $x_N = \frac{1}{2}$, der andere Faktor ist e^{2x}, der immer größer als 1 ist, solange $x > 0$. Für $x = 0$ haben beide Funktionen ebenfalls den gleichen Wert $y = 4$. Also liegt die Schnittfläche zwischen den Schnittpunkten Y und N, und $f(x)$ ist größer als $g(x)$. Damit ist die Schnittfläche

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) - g(x)\,dx = F(\frac{1}{2}) - G(\frac{1}{2}) - F(0) + G(0)$$

wobei $F(x)$ aus dem vorhergehenden Abschnitt bereits bekannt ist, und $G(x) = 4x + 4x^2 + C$ sich schnell errechnet. Einsetzen in die Stammfunktionen ergibt die Fläche $A = 4(1-\frac{1}{2})e^1 - (2-1) - (4(1-0)e^0 - (0-0)) = 2 \cdot e - 5 \approx 0{,}44$. Die gesuchte Schnittfläche hat also näherungsweise 0,44 Flächeneinheiten.

2.6 Funktionsskizzen von $f(x)$