Mathematik • Torsten Warncke • Schulzentrum Neustadt	
Funktionsbestimmung	*Datum*
Steckbriefaufgaben 4	*27. November 2013*

1 Steckbriefaufgaben 4: Koeffizientenbestimmung für ganzrationale Funktionen

Bei der Koeffizientenbestimmung handelt es sich um eine Umkehrung der Kurvendiskussion. Aus vorgegebenen Eigenschaften eines Graphen sollen die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ der zugehörigen Funktionsgleichung $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ bestimmt werden.

Jede Information über die gesuchte Funktion wird in eine Gleichung umgesetzt. So entsteht ein Gleichungssystem. Dieses Gleichungssystem muss genau so viele Gleichungen enthalten wie unbekannte Koeffizienten zu bestimmen sind. Das entstandene lineare Gleichungssystem kann dann z.B. mit dem Casio fx-991 (MODE 5,1 oder 5,2), dem Additionsverfahren oder der Gaußmethode gelöst werden.

Mögliche Informationen und ihre Umsetzung:

- beliebige Punkte des Graphen $P(x \mid y)$
  x- und y-Wert in die allgemeine Funktionsgleichung ($y = f(x)$) einsetzen
- rel. Hoch- und Tiefpunkte (Extrempunkte)
  Den x-Wert in die 1. Ableitung der allgemeinen Funktionsgleichung einsetzen, deren Ergebnis null werden muss.
- Wendepunkte
  Den x-Wert in die 2. Ableitung einsetzen, deren Ergebnis Null werden muss.
- Sattelpunkte
  Den x-Wert sowohl in die 1. als auch in die 2. Ableitung einsetzen, die jeweils Null ergeben müssen.
- Steigungen des Graphen bzw. Tangentensteigungen
  Den x-Wert in die 1. Ableitung einsetzen, deren Ergebnis gleich dem Steigungswert sein muss.
- Symmetrieeigenschaften (YAS bzw. 0PS)
  Reduzierung der allgemeinen Funktionsgleichung und damit Reduzierung der Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten: bei Achsensymmetrie (YAS) bleiben nur Glieder mit geraden Exponenten und absolutes Glied, bei Punktsymmetrie (0PS) nur Glieder mit ungeraden Exponenten und kein absolutes Glied.

1.1 Beispiel

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Sie soll an der Stelle $x = -1$ einen Extremwert und im Punkt $W(0\,|\,4)$ einen Wendepunkt haben. Die zugehörige Wendetangente hat die Steigung -6.

Ansatz
Die allgemeine Funktionsgleichung für eine GRF 3. Grades lautet:
$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Ableitungen
$f'(x) = 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$
$f''(x) = 6 \cdot a_3 \cdot x + 2 \cdot a_2$
$f'''(x) = 6 \cdot a_3 \neq 0$

Punkt $W(0\,|\,4)$ einsetzen in die Ausgangsfunktion
I $f(0) = 4 = a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 4$

Wendepunkt $W(0\,|\,4)$ einsetzen in 2. Ableitung (NBfW)
II $f''(0) = 0 = 6 \cdot a_3 \cdot 0 + 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

Extremstelle $x = -1$ einsetzen in 1. Ableitung (NBfE)
III $f'(-1) = 0 = 3 \cdot a_3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot a_2 \cdot (-1) + a_1 \Rightarrow 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$

Steigung der Wendetangente -6, d.h. Steigung -6 im Wendepunkt $W(0\,|\,4)$ einsetzen in 1. Ableitung
IV $f'(0) = -6 = 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + a_1 \Rightarrow a_1 = -6$

$a_2 = 0$ und $a_1 = -6$ in III einsetzen ergibt $3a_3 - 6 = 0 \Rightarrow a_3 = 2$ und dann einsetzen in den Ansatz für die Ausgangsfunktion

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x + 4$$

lautet die gesuchte Funktionsgleichung.