Steckbriefaufgaben	*Datum*
Lösungen der Steckbriefaufgaben (Koeffizientenbestimmung)	*15. Juni 2006*

1. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat eine Nullstelle $x = 0$, ein lokales Maximum in $P_{\max}(-1|5)$ und eine Wendestelle bei $x_w = 1$?
   Lösung: Nullstelle bei $x = 0 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d = 0$

   Punkt $P_{\max}(-1|5) \Rightarrow f(-1) = a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d = -a+b-c+d = 5$

   ein lokales Maximum in $P_{\max}(-1|5) \Rightarrow f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 3a - 2b + c = 0$

   Wendestelle bei $x_w = 1 \Rightarrow f''(x_w) = f''(1) = 6a \cdot 1 + 2b = 6a + 2b = 0$
   Also ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} I & -a & + & b & - & c & = & 5 \\ II & 3a & - & 2b & + & c & = & 0 \\ III & 6a & + & 2b & & & = & 0 \end{bmatrix}$$

   Die Summe der Gleichungen $I + II + \frac{1}{2} \cdot III$ führt zu $a = 1$, was in der Summe der Gleichungen $I + II$ eingesetzt zu $b = -3$ führt. Beides in Gleichung I eingesetzt ergibt dann $c = -9$. Die gesuchte Funktion lautet $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$.

2. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat an der Stelle $x = 0$ ein Extremum und im Punkt $W(2|0)$ einen Wendepunkt. Die zugehörige Wendetangente hat die Steigung -3/2.
   Lösung: $f'(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 0$ wegen dem Extremum, $f(2) = 0$ wegen $W(2|0)$, $f''(2) = 0$ wegen dem Wendepunkt $W(2|0)$, und wegen dessen Steigung $f'(2) = -\frac{3}{2}$, so dass das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{bmatrix} I & 8a & + & 4b & + & d & = & 0 \\ II & 12a & + & 2b & & & = & 0 \\ III & 12a & + & 4b & & & = & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

   Aus $III - II$ folgt $b = -\frac{3}{4}$, dies einsetzen in II führt zu $a = \frac{1}{8}$ und dann eingesetzt in I zu $d = 2$. Die gesuchte Funktion lautet $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$.

3. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat einen Graphen, der durch die Punkte $P_1(1|-17), P_2(0|3), P_3(-1|29)$ und $P_4(2|-25)$ verläuft?
   Lösung: $P_1 : f(1) = -17$ $P_2 : f(0) = 3$, $P_3 : f(-1) = 29$, $P_4 : f(2) = -25$ einsetzen, z.B. $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -17$, dann bekommst du vier Gleichungen mit vier Unbekannten (wegen Gleichung II wie oben eigentlich auch nur 3 Gleichungen):

$$\begin{bmatrix} I & a & + & b & + & c & + & d & = & -17 \\ II & & & & & & & d & = & 3 \\ III & -a & + & b & - & c & + & d & = & 29 \\ IV & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & -25 \end{bmatrix}$$

   Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a = 1, b = 3, c = -24, d = 3$, und somit: $f(x) = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 3$.

4. Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 , deren Graph durch $A(2|2)$ und $B(3|9)$ geht und den Tiefpunkt $T(1|1)$ hat.
Lösung: 1) $A(2|2)$ liegt auf dem Graphen $\Rightarrow f(2) = 2.$ $\Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 2$ 2) $B(3|9)$ liegt auf dem Graphen $\Rightarrow f(3) = 9.$ $\Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 9$ 3) $T(1|1)$ liegt auf dem Graphen $\Rightarrow f(1) = 1.$ $\Rightarrow a + b + c + d = 1$ 4) T ist Tiefpunkt $\Rightarrow f'(1) = 0$ (notw. Bedingung für Tiefpunkte) $\Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ Das Gleichungssystem dieser 4 Gleichungen hat die Lösung $a = 1, b = -3, c = 3, d = 0$, d.h. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

5. Welche ganzrationale Funktion 4. Grades hat einen Graphen, der symmetrisch zur y-Achse ist und durch den Wendepunkt $W(1|0)$ und den Tiefpunkt $T(\sqrt{3}| - 1)$ verläuft?
Lösung: Wegen YAS gilt: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$, $f''(x) = 12ax^2 + 2b$. Wendepunkt $\Rightarrow f(1) = 0$ und $f''(1) = 0$. Tiefpunkt $\Rightarrow f(\sqrt{3}) = -1$ und $f'(\sqrt{3}) = 0$. Das Gleichungssystem hat eigentlich nur wieder drei Gleichungen, weil die 4. Gleichung der 2. Gleichung entspricht:

$$\begin{bmatrix} I & a & + & b & + & c & = & 0 \\ II & 12a & + & 2b & & & = & 0 \\ III & 9a & + & 3b & + & c & = & -1 \end{bmatrix}$$

Aus $III - I - II$ folgt $a = \frac{1}{4}$, dies einsetzen in II ergibt $b = -\frac{3}{2}$ und dann eingesetzt in I ergibt $c = \frac{5}{4}$, d.h. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$.

http://www.warncke-family.de/phy/steckbrief_2_lsg.pdf