1 Schilling S. 385 Nr. 3 a)–d)

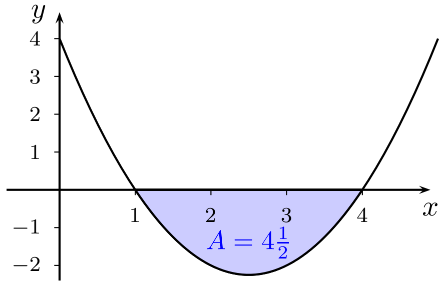
„Berechnen Sie den Zahlenwert der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.“ Klingt nach genau einer Fläche, die nur von der x-Achse und f begrenzt wird. Damit die Grenze keine Lücke hat, muss sich f natürlich mit der x-Achse verbinden, d.h. wir suchen die Nullstellen, das sind diejenigen x, für die eine Funktion Null wird, d.h. wir lösen $f = 0$, um jeweils die Integrationsgrenzen a,b zu bestimmen. Je nach dem, ob die Fläche unterhalb oder oberhalb der x-Achse von f und der x-Achse eingeschlossen wird, ist der Flächenwert der negative oder positive Wert des bestimmten Integrals:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

A ist der gesuchte Flächenwert, a,b sind die beiden Nullstellen von f, wobei wir von links nach rechts integrieren: $a < b$, und $|...|$ sind Betragsstriche, d.h. wenn die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, liefert das Integral $\int dx$ einen negativen Wert, bei dem wir das Minuszeichen $(-)$ wegwerfen, da Flächen nur positive Werte (Beträge) haben. Um sicher zu gehen kann man auch den Funktionswert für ein x ausrechnen, welches zwischen den Nullstellen a,b liegt: $f(x) = ...$, mit $a < x < b$, und das Vorzeichen dieses Funktionswertes wird auch das Vorzeichen des Integrals sein.

1.1 Beispiel 3.a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

f ist in Normalform (pq-Form), d.h. die Nullstellen können sofort mit pq-Formel berechnet werden: $x_1 = a = 1$ und $x_2 = b = 4$. Da die Parabel nach oben offen ist ($f(x) = +x^2...$) kann die eingeschlossene Fläche ja nur unterhalb der x-Achse liegen, das Integral liefert also einen negativen Wert: $\int_1^4 f(x)\,dx = F(4) - F(1) = -4\frac{1}{2}$



Der gesuchte Zahlenwert der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse zwischen den Nullstellen $a = 1$ und $b = 4$ einschließt, ist also $A = 4{,}5$.

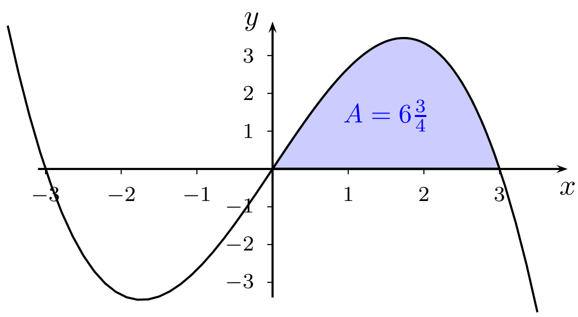
1.2 Lösungen Nr. 3 b)–d)

b) $f(x) = x^2 - x - 2$, Nullstellen sind $a = -1$ und $b = 2$, die Fäche ist $A = 4{,}5$.
c) $f(x) = x^2 - x$, Nullstellen sind $a = 0$ und $b = 1$, die Fäche ist $A = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$.
d) $f(x) = -3x^2 - 6x + 9$, Parabel ist nach unten offen, Nullstellen sind $a = -3$ und $b = 1$, die Fäche ist $A = +\int_{-3}^{1} f\,dx = 32$.

2 Schilling S. 385 3.e) und 3.f)

Hier kann man nicht mehr stumpf pq-Formel machen, sondern muss vorher überlegen, da f eine ganzrationale Funktion 3. bzw. 4. Grades ist!

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$ ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, hat also maximal 3 Nullstellen. Klammern wir $-\frac{1}{3}x$ aus, so ist f das Produkt: $f(x) = -\frac{1}{3}x \cdot (x^2 - 9)$. Nach EpiNweFNi gibt es **3** Lösungen für die Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 3$. Wenn wir schlau erkennen, dass f OPS ist, so können wir für die Berechnung der Fläche einfach nur von 0 bis 3 integrieren und dann das Ergebnis mal 2 nehmen. $A = 2 \cdot 6\frac{3}{4} = 13{,}5$.



f) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, hat also maximal 4 Nullstellen. Substituieren (Ersetzen) wir $z = x^2$, so ist $f(z)$ eine quadratische Funktion: $f(z) = z^2 - 6z + 5$, deren Nullstellen wir mit pq berechnen: $z_{1,2} = 3 \pm 2$. Nun müssen wir $z = x^2$ benutzen und erhalten die **4** Nullstellen $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$. Wenn wir schlau erkennen, dass f YAS ist, so können wir für die Berechnung der Fläche einfach von 0 bis 1 integrieren ($A_\oplus$) und dann dazu den Betrag ($A_\ominus$) des Integrals von 1 bis $\sqrt{5}$ und schließlich diese Summe mal 2 nehmen. $A = 2 \cdot (A_\oplus + A_\ominus) = 12{,}8$.