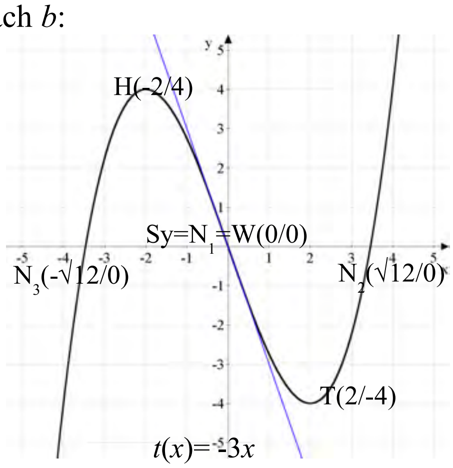
| |
|---|
| 1. $f(x) = 1/4\,x^3 - 3x \qquad x \in D(f) = [-3;6]$ |

- $D(f) = [-3;6]$, $D_{max} = \mathbb{R}$, da $f$ ganzrational ist
- Punktsymmetrisch (0PS) zum Ursprung (0|0), da $f$ ganzrational ist und alle Exponenten von $x$ ungerade sind. (Alternativ könnte man auch beweisen, dass $f(x) = -f(-x)$ ist)
- Im Unendlichen verhält sich die Funktion wie folgt:
  $x \to \infty:\ f(x) \to \infty$
  $x \to -\infty: f(x) \to -\infty$
  weil $f(x)$ ganzrational ist, der Grad ungerade (n=3) ist und der Koeffizient $a_n > 0$ ist.
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  - y-Achse: Bedingung $x = 0 \Rightarrow f(0)=0 \;\Rightarrow Y(0|0)$
  - x-Achse: Bedingung $f(x)=0 \Rightarrow 1/4\,x^3 - 3\,x = 0$ Ausklammern
    $\Leftrightarrow x\,(1/4\,x^2 - 3) = 0 \;\Rightarrow\; x_1=0$
    oder: $1/4\,x^2 - 3 = 0$
    $\Leftrightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{12}$
    $\Rightarrow N_1(0|0);\; N_2(\sqrt{12}|0);\; N_3(-\sqrt{12}|0)$
- Extrempunkte: Wir bilden erst einmal alle 3 Ableitungen:
  $f'(x) = 3/4\,x^2 - 3$
  $f''(x) = 3/2\,x$
  $f'''(x) = 3/2$
  notwendige Bedingung für Extrema: $f'(x)= 0 \Rightarrow 3/4\,x^2 - 3 = 0$
  $\Leftrightarrow x^2 = 4$
  $\Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$
  Überprüfen:
  $f''(2) = 3 > 0 \Rightarrow$ Minimalstelle!
  $f''(-2) = -3 < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle! (hätte man auch wegen der Symmetrie begründen können)
  Funktionswerte:
  $f(2) = 8/4 - 3\cdot 2 = -4 \Rightarrow$ Tiefpunkt T(2|-4)
  $f(-2) = -8/4 + 3\cdot 2 = 4 \Rightarrow$ Hochpunkt H(-2|4)
- Wendepunkte: notwendige Bedingung $f''(x)=0 \Rightarrow 3/2\,x = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0$
  Überprüfen:
  $f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$ Es liegt eine Wendestelle vor!
  Funktionswert:
  $f(0) = 0 \Rightarrow W(0|0)$
  - allgemeine Geradengleichung der Tangente: $t(x) = mx + b$
- Wendetangente: Bestimmen der Tangente im Wendepunkt
  - wir kennen den $y$-Wert $t(x) = 0$ und den $x$-Wert $x = 0$ (aus dem Wendepunkt W(0|0) abgelesen)
  - Wir berechnen die Steigung ($f'$ ist $m$!) an dieser Stelle $x$=0:
    $f'(0) = 3/4\cdot 0^2 - 3 = -3 \;\Rightarrow$ Die Steigung der Tangente beträgt $m = -3$
  - Einsetzen in allgemeine Geradengleichung und Auflösen nach $b$:
    $0 = -3\cdot 0 + b$
    $\Leftrightarrow 0 = b$
    $\Rightarrow$ Tangentengleichung: $t(x)= -3x + 0$ (oder: $t(x)= -3x$)
- Graph mit allen berechneten Punkten:
  (der Graph darf wegen $D(f)$ bis auf $x = 6$ erweitert werden)



| 2. $f(x) = -1/6\,x^4 + x^2 - 4/3\,x + 1/2, \quad x \in D(f) = [-4;2]$ **(mit der Polynomdivision)** |
|---|

- $D = [-4;2]$, $D_{max} = R$, da $f$ ganzrational ist
- keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten von $x$
- Im Unendlichen verhält sich die Funktion wie folgt:
  $x \to \infty: f(x) \to -\infty$
  $x \to -\infty: f(x) \to -\infty$
  weil $f(x)$ ganzrational ist, der Grad ungerade (n=4) ist und der Koeffizient $a_n < 0$ ist.
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  - <u>$y$-Achse:</u> Bedingung $x=0 \Rightarrow f(0)=1/2 \Rightarrow Y(0 \mid 1/2)$
  - <u>$x$-Achse</u>: Bedingung $f(x)=0 \Rightarrow -1/6\,x^4 + x^2 - 4/3\,x + 1/2 = 0$

    $\Leftrightarrow x^4 - 6\,x^2 + 8\,x - 3 = 0$

    $\Rightarrow$ geraten: $x_1 = 1$; weiter mit Polynomdivision (alternativ Horner-Schema):

    $(x^4 - 6\,x^2 + 8\,x - 3) : (x-1) = x^3 + x^2 - 5x + 3$
    $\underline{-(x^4 - x^3)}$
    $x^3 - 6x^2$
    $\underline{-(x^3 - x^2)}$
    $-5x^2 + 8x$
    $\underline{-(5x^2 + 5x)}$
    $3x - 3$
    $\underline{-(3x - 3)}$
    $0$

    erneut raten: $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow$ Polynomdivision:
    $(x^3 + x^2 - 5x + 3) : (x-1) = x^2 + 2x - 3$
    $\underline{-(x^3 - x^2)}$
    $2x^2 - 5x$
    $\underline{-(2x^2 - 2x)}$
    $-3x + 3$
    $\underline{-(-3x + 3)}$
    $0$

    weiter mit:
    $x^2 + 2\,x - 3 = 0$
    $\Rightarrow x_3 = -3;\ x_4 = +1$

    $\Rightarrow N_{1,2,3}(1|0);\ N_4(-3|0)$ (N$_1$ ist dreifache Nullstelle!!)
- Extrempunkte: Wir bilden erst einmal alle 3 Ableitungen:
  $f'(x) = -2/3\,x^3 + 2\,x - 4/3$
  $f''(x) = -2\,x^2 + 2$
  $f'''(x) = -4\,x$
  <u>notwendige Bedingung für Extrema</u>: $f'(x)=0 \Rightarrow -2/3\,x^3 + 2\,x - 4/3 = 0$
  $\Leftrightarrow 2\,x^3 - 6\,x + 4 = 0$; geraten: $x_1 = 1$; weiter mit Polynomdivision!!!
  $\Rightarrow (2\,x^3 - 6\,x + 4) : (x-1) = 2\,x^3 + 2\,x - 4$
  $\underline{-(2x^3 - 2\,x^2)}$
  $2x^2 - 6x$
  $\underline{-(2x^2 - 2x)}$
  $-4x + 4$
  $\underline{-(-4\,x + 4)}$
  $0$

  weiter mit: $2\,x^3 + 2\,x - 4 = 0$
  $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$
  $\Rightarrow x_2 = 1;\ x_3 = -2$
  (Beachte $x_{1,2} = 1$ ist doppelte Nullstelle der Ableitung)

  <u>Überprüfen:</u>
  $f''(1)=0 \Rightarrow$ Überprüfen mit VZW-Kriterium ist nötig (gehen wir dazu 1 links bzw. rechts)!
  $f'(0) = -4/3 < 0$ (links vom Kandidaten fällt die Funktion)
  $f'(2) = -16/3 + 4 - 4/3 = -8/3 < 0 \Rightarrow$ kein VZW $\Rightarrow$ kein Extremum sondern Sattelpunkt!
  $f'(-2) = -6 < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle!
  <u>Funktionswerte</u>:
  $f(1) = -1/6 + 1 - 4/3 + 1/2 = (-1+6-8+3)/6 = 0 \Rightarrow W_S\,(1|0)$
  $f(-2) = -16/6 + 4 + 8/3 + 1/2 = (-16+24+16+3)/6 = 9/2 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(-2 \mid 9/2)$
- Wendepunkte: <u>notwendige Bedingung</u> $f''(x)=0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0$
  $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$
  <u>Überprüfen:</u>
  $f'''(1) = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Es liegt eine Wendestelle (dreifache Nullstelle!) vor $\Rightarrow W_S(1|0)$ (s.o.)
  $f'''(-1) = 4 \neq 0$ Es liegt eine Wendestelle vor!
  <u>Funktionswert:</u>
  $f(-1) = -1/6 + 1 + 4/3 + 1/2 = (-1+6+8+3)/6 = 8/3 \Rightarrow W(-1 \mid 8/3)$

- Wendetangente: Bestimmen der Tangente im Wendepunkt

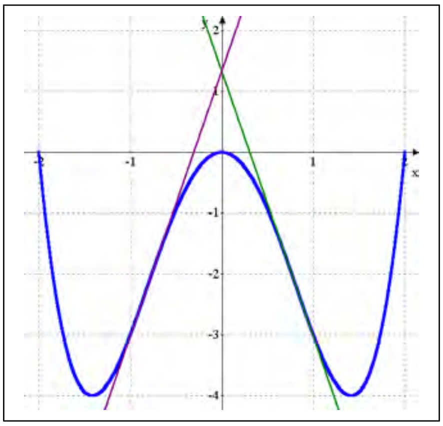
Tangente im Sattelpunkt (Steigung 0): $t(x) = 0$ ($x$-Achse.)
in W: $t_2(x) = mx + b$
mit $m = f\,'(-1) = 2/3 \;\; - 2 - 4/3 = -8/3$
$b = t_2(x) - mx = 8/3 - (-8/3)\cdot(-1) = 0$
$t_2(x) = -8/3\; x$

(Der nebenstehende Graph darf wegen D($f$) bis auf $x$ = -4 erweitert werden)

| 3. $f(x) = x^4 - 4\,x^2$ $\quad x \in D(f)$ $\quad$ **(mit Ausklammern)** |
|---|

- $D_{max}$ = R, da $f$ ganzrational ist
- $y$-Achsensymmetrisch (YAS), da $f$ ganzrational ist und alle Exponenten von $x$ gerade sind. (Alternativ könnte man auch beweisen, dass $f(x) = f(-x)$ ist)
- Im Unendlichen verhält sich die Funktion wie folgt:
  $x \to \infty :\; f(x) \to \infty$
  $x \to -\infty :\; f(x) \to \infty$
  weil $f(x)$ ganzrational ist, der Grad gerade (n=4) ist und der Koeffizient $a_n > 0$ ist.
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  - y-Achse: Bedingung x=0 $\Rightarrow f(0)=0 \;\Rightarrow$ Y(0|0)
  - x-Achse: Bedingung $f(x)=0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0$ ($x^2$ lässt sich ausklammern)
    $\Leftrightarrow x^2\;(x^2 - 4) = 0 \;\Rightarrow x_{1,2}=0$ (doppelte Nullstelle!)
    oder: $x^2 - 4 = 0$
    $\Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2$
    $\Rightarrow N_{1,2}(0|0);\; N_3(2|0);\; N_4(-2|0)$
- Extrempunkte: Wir bilden erst einmal alle 3 Ableitungen:
  $f\,'(x)= 4\,x^3 - 8\,x$
  $f\,''(x)= 12x^2 - 8$
  $f\,'''(x)= 24\,x$
  notwendige Bedingung für Extrema: $f\,'(x)=0 \Rightarrow 4x^3 - 8x = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 8 = 0$
  $\Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$
  Überprüfen:
  $f\,''(\sqrt{2})=16 > 0 \Rightarrow$ Minimalstelle!
  $f\,''(-\sqrt{2})=16>0 \Rightarrow$ Minimalstelle! (logisch wegen der Symmetrie YAS)
  $f\,''(0) = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle!
  Funktionswerte:
  $f(\sqrt{2})= 4-8 = -4 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T_1(\sqrt{2}|-4)$
  $f(-\sqrt{2})= -4 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T_2(-\sqrt{2}|4)$
  H(0|0) (siehe Y)
- Wendepunkte: notwendige Bedingung $f\,''(x)=0 \Rightarrow 12x^2 - 8=0$
  $\Leftrightarrow x^2 = 2/3 \;\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2/3}$
  Überprüfen:
  $f\,'''(\pm\sqrt{2/3}) \neq 0 \Rightarrow$ Es liegt eine Wendestelle vor!
  Funktionswert:
  $f(\pm\sqrt{2/3}) = 4/9 - 8/3 = -20/9 \Rightarrow W(\pm\sqrt{2/3} \mid -20/9)$
- Wendetangenten: Bestimmen der Tangente im Wendepunkt
  - allgemeine Geradengleichung der Tangente: $t(x) = mx + b$
  - wir kennen den $y$-Wert $t(x)=-20/9$ und den $x$-Wert $x = \sqrt{2/3}$ (aus dem Wendepunkt $W(\sqrt{2/3} \mid -20/9)$ abgelesen)
  - Wir berechnen die Steigung ($m$) an dieser Stelle $x=\sqrt{\mathbf{2/3}}$
    $f\,'(\sqrt{\mathbf{2/3}}) = 4\cdot\sqrt{\mathbf{2/3}}^{\,3} - 8\,\sqrt{\mathbf{2/3}} = \sqrt{2/3}\,(8/3 - 8) = -16/3 \cdot \sqrt{2/3} \Rightarrow$ Die Steigung der Tangente beträgt $m = -16/3 \cdot \sqrt{2/3}$

- Einsetzen in die allgemeine Geradengleichung und Auflösen nach *b*:
  $-20/9 = \sqrt{2/3} \cdot (-16/3 \cdot \sqrt{2/3}) + b$
  $\Leftrightarrow -20/9 = -32/9 + b \Rightarrow b = 12/9 = 4/3$
  $\Rightarrow$ Tangentengleichung: $t(x) = -16/3\sqrt{2/3} \cdot x + 4/3$

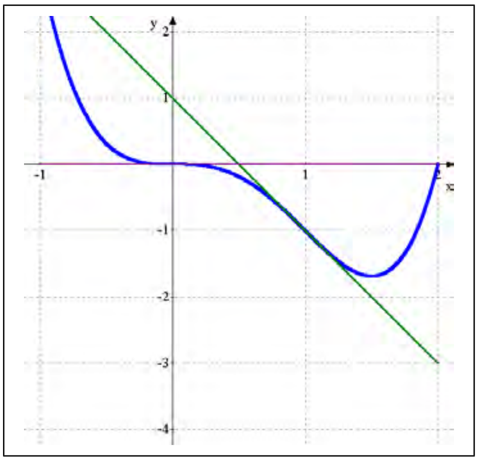



- Graph mit allen berechneten Punkten:

| 4. $f(x) = x^4 - 2x^3$    $x \in D(f) = [-1;2]$ )      **(mit Ausklammern)** |
|---|

- $D_{max} = R$, da $f$ ganzrational ist
- keine Symmetrie vorhanden, da $f$ ganzrational ist und die Exponenten von $x$ sowohl gerade also auch ungerade sind.
- Im Unendlichen verhält sich die Funktion wie folgt:
  $x \to \infty : f(x) \to \infty$
  $x \to -\infty : f(x) \to \infty$
  weil $f(x)$ ganzrational ist, der Grad gerade (n=4) ist und der Koeffizient $a_n > 0$ ist.
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  - y-Achse: Bedingung $x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow Y(0|0)$
  - x-Achse: Bedingung $f(x)=0 \Rightarrow x^4 - 2x^3 = 0$ ($x^3$ lässt sich ausklammern)
    $\Leftrightarrow x^3 \ (x-2) = 0 \Rightarrow x_{1,2,3}=0$ (dreifache Nullstelle!)
    oder: $x-2 = 0$
    $\Rightarrow x_4 = 2$
    $\Rightarrow N_{1,2,3}(0|0); N_4(2|0)$ (dreifache Nullstelle!)
- Extrempunkte: Wir bilden erst einmal alle 3 Ableitungen:
  $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$
  $f''(x) = 12x^2 - 12x$
  $f'''(x) = 24x - 12$
  notwendige Bedingung für Extrema: $f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3 - 6x^2 = 0$
  $\Leftrightarrow x_{1,2} = 0 \vee 4x-6 = 0$
  $\Rightarrow x_3 = 3/2$
  Überprüfen:
  $f''(0)=0 \Rightarrow$ Überprüfung mit VZW-Kriterium nötig:
  $f'(-1) = -4-6=-10$
  $f'(1)= 4-6 = -2$ $\Rightarrow$ kein VZW $\Rightarrow$ kein Extremum sondern Sattelpunkt!
  $f''(3/2)=12 \cdot 9/4 - 12 \cdot 3/2 = 27-18=9>0 \Rightarrow$ Minimalstelle!
  Funktionswerte:
  $f(0)= 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt $W_S(0|0)$
  $f(3/2)= 81/16 - 54/8 = -27/16 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(3/2 \mid -27/16)$
- Wendepunkte: notwendige Bedingung $f''(x)=0 \Rightarrow 12x^2 - 12x =0$
  $\Leftrightarrow x = 0 \vee 12x - 12 =0 \Rightarrow x_2 =1$
  Überprüfen:
  $f'''(0) =-12 \neq 0 \Rightarrow$ Es liegt eine Wendestelle vor!
  $f'''(1) =12 \neq 0$ Es liegt eine Wendestelle vor!
  Funktionswert:
  $W_1 = Y$
  $f(1) = -1 \Rightarrow W_2(1|-1)$
- Wendetangenten: Bestimmen der Tangente im Wendepunkt
  - allgemeine Geradengleichung der Tangente: $t(x) = mx + b$
  - Wir berechnen die Steigung (das ist *m*!) an der Stelle $x = \boldsymbol{1}$ :
    $f'(\boldsymbol{1}) = 4-6=-2$ (vgl. o. VZW) $\Rightarrow$ Die Steigung der Tangente beträgt $m = -2$

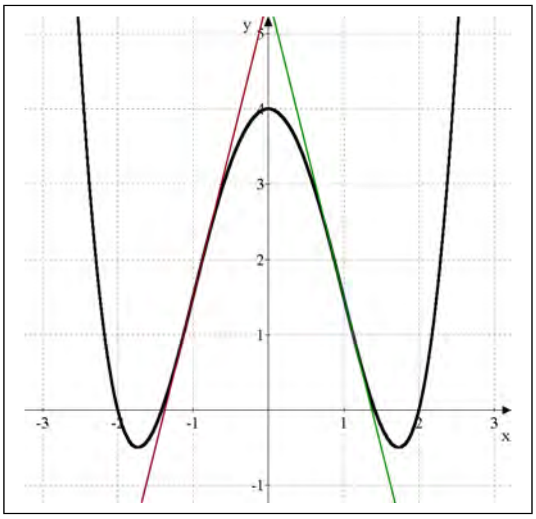
- Einsetzen in allgemeine Geradengleichung und Auflösen nach $b$:
  $-1= -2\cdot 1 + b$
  $\Leftrightarrow b=1$
  $\Rightarrow$ Tangentengleichung: $t(x)= -2x +1$
- Graph mit allen berechneten Punkten:




• • • • • • • • •

**9.** $f(x) = 0{,}5\, x^4 - 3x^2 + 4 \qquad x \in D(f)$ **(mit Substitution)**

- $D_{max} = \mathbb{R}$, da $f$ ganzrational ist
- $y$-achsensymmetrisch (YAS), da $f$ ganzrational ist und die Exponenten von $x$ gerade sind.
- Im Unendlichen verhält sich die Funktion wie folgt:
  $x \to \infty: f(x) \to \infty$
  $x \to -\infty: f(x) \to \infty$
  weil $f(x)$ ganzrational ist, der Grad gerade (n=4) ist und der Koeffizient $a_n > 0$ ist.
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  - <u>y-Achse:</u> Bedingung $x = 0 \Rightarrow f(0)=4 \Rightarrow Y(0|4)$
  - <u>x-Achse</u>: Bedingung $f(x) = 0 \Rightarrow 1/2\, x^4 - 3x^2 + 4 = 0$
    $\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \qquad$ mit $x^2 = u$
    $\Rightarrow u_{1,2} = 3 \pm \sqrt{(9-8)} = 3 \pm 1$
    $\Rightarrow u_1 = 4 \vee u_2 = 2 \qquad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}41$
    $\Rightarrow N_{1,2}(\pm 1|0);\ N_{3,4}(\sqrt{2}|0)$
- Extrempunkte: Wir bilden erst einmal alle 3 Ableitungen:
  $f'(x)= 2x^3 - 6x$
  $f''(x)= 6x^2 - 12$
  $f'''(x)= 12x$
  <u>notwendige Bedingung für Extrema</u>: $f'(x)=0 \Rightarrow 2x^3 - 6x = 0$
  $\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee 2x^2-6 = 0$
  $\Rightarrow \quad x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}73$
  <u>Überprüfen:</u>
  $f''(0)=-12 < 0 \Rightarrow$ Maximum
  $f''(\sqrt{3})=6 > 0 \Rightarrow$ Minimalstelle!
  wegen Symmetrie (YAS): $x = -\sqrt{3} \Rightarrow$ Minimalstelle
  <u>Funktionswerte</u>:
  Hochpunkt $H = Y(0|4)$
  $f(\sqrt{3})= 9/2 - 9 + 4 = -0{,}5 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(\sqrt{3} \mid -0{,}5)$
- Wendepunkte: <u>notwendige Bedingung</u>
  $f''(x)=0 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
  <u>Überprüfen:</u>
  $f'''(1) = 12 \neq 0$ Es liegt eine Wendestelle vor!
  <u>Funktionswert:</u>
  $f(1)= 1/2 - 3 + 4 = 1{,}5 \Rightarrow W_1(1 \mid 1{,}5)$
  wegen Symmetrie: $W_2(-1 \mid 1{,}5)$
- Wendetangenten: Bestimmen der Tangente im W.
  - in $W_1$: $\quad m=f'(1)=-4$
    $b = t_2(x)-mx = 1{,}5 - (-4)1 = 5{,}5$
    $\Rightarrow$ Tangentengleichung: $t_1(x)= 4x + 5{,}5$
    wegen Symmetrie: $\qquad t_2(x)= -4x + 5{,}5$
- Graph mit allen berechneten Punkten:



Nach diesen ausführlichen Musterlösungen sollte es kein Problem sein, die anderen Aufgaben zu lösen. Deswegen werden nun die Lösungen ohne Rechenweg und ohne Begründung angegeben. Für eine **Hausaufgabe** oder ähnliches ist das folgende klar **inakzeptabel**! Zum Vergleichen wird es aber hilfreich sein (S.213 komplett gelöst).

Für alle ganzrationalen Funktionen gilt für den maximalen Definitionsbereich $D_{max} = R$

5. $f(x)=4x^2-2x^4$ *y*-achsensymmetrisch (YAS), Y(0|0), $N_1(-\sqrt{2}|0), N_{2,3}(0|0), N_4(\sqrt{2}|0)$
- *T*(0|0), $H_1$(-1|2), $H_2$(1|2) $W_1(-\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{10}{9}), W_2(\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{10}{9})$

6. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2$ weder YAS noch 0PS, Y(0|0), $N_{1,2}(0|0)$
- *T*(0|0), $H_1$(-1|2), $H_2$(1|2) $W_S(-2|\frac{4}{3}), W(-\frac{2}{3}|\frac{44}{81})$

7. $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ weder YAS noch 0PS, Y(0|3), $N_1$(1|0), $N_2$(-1|0), $N_3$(3|0)
- $T(1+2\sqrt{\frac{1}{3}}|-\frac{16}{9}\sqrt{3}), H(1-2\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{16}{9}\sqrt{3})$ *W*(1|0)

8. $f(x)=x^3-4x-16$ weder YAS noch 0PS
- *Y*(0|-16), $N\approx$ (3,04|0) mit „normalen“ Mitteln, d.h. für Schüler eigentlich nicht lösbar!
- $H\approx$ (-1,15|-12,92), $T\approx$ (1,15|-19,08), für Schüler eigentlich nicht lösbar! *W*(0|16)

10. $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ weder YAS noch 0PS, Y(0|-2), $N_1(2-\sqrt{3}|0), N_2(2+\sqrt{3}|0), N_3(2|0)$
- *H*(1|2), *T*(3|-2) *W*(2|0)

11. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2+2$ weder YAS noch 0PS Y(0|2), kein *N*
- *T*(0|2), kein *H* $W(\frac{2}{3}|\frac{9}{4}), W_S(2|\frac{10}{3})$

12. $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3-x^2$ weder YAS noch 0PS, Y(0|0), $N_{1,2}(0|0), N_3(1-\sqrt{13}|0), N_4(1+\sqrt{13}|0)$
- *H*(0|0), $T_1\approx$ (-1,81|-1,39), $T_2\approx$ (3,31|-6,97) $W_1(-1|-\frac{3}{4}), W_2(2|-4)$

13. $f(x)=x^3-6x^2+9x$ weder YAS noch 0PS, Y(0|0), $N_1$(0|0), $N_{2,3}(3|0)$
- *H*(1|4), *T*(3|0), *W*(2|2)

14. $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ weder YAS noch 0PS, Y(0|-1), *N*(1|0)
- keine Extrema, $W_S$(1|0)

15. $f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x$ weder YAS noch 0PS, Y(0|0), $N_1$(-1|0), $N_2$(0|0), $N_3$(2|0), $N_4$(3|0)
- *H*(1|4), $T_1(1-\frac{1}{2}\sqrt{10}|-\frac{9}{4})\approx(-0{,}58|-2{,}25), T_2(1+\frac{1}{2}\sqrt{10}|-\frac{9}{4})\approx(2{,}58|-2{,}25)$
  $W_1\approx$(0,09|0,528), $W_2\approx$(1,91|0,528)