

Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153**S.149****6a)** Wichtig! Kenntnisse in Potenz- und Wurzelgesetzen auffrischen!1. Schritt:  $f(x)$  mit Hilfe von Potenz- und Wurzelgesetzen umformen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} = \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3}$$

2. Schritt: Mit Potenzregel (Total Normal!) ableiten!

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{(-2/3-1)} = -\frac{2}{3}x^{-5/3}$$

3. Schritt: laut Aufgabenstellung soll  $f'(x)$  in Wurzelschreibweise angegeben werden, also Rückumwandlung (wieder mit Potenz- und Wurzelgesetzen)

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-5/3}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3x^{5/3}}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

**7a)**  $f(x) = 3x^3 \Rightarrow$  Ableitungsfunktion:  $f'(x) = 9x^2$ Tangentensteigung in P beträgt:  $f'(2) = 9 \cdot 2^2 = 36$ 

allgemeine Geradengleichung als Ansatz für die Tangente:

$$t(x) = mx + b$$

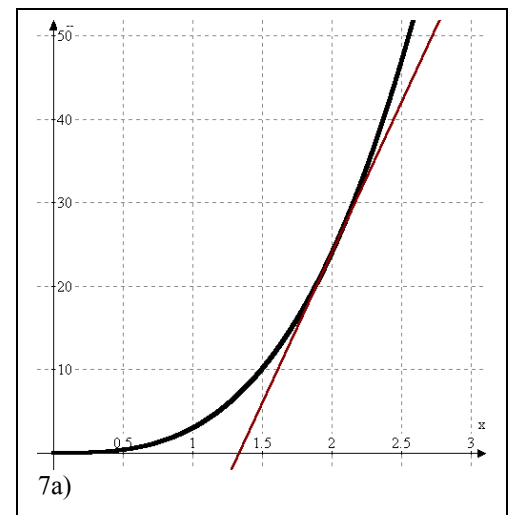
mit  $m=f'(2)=36$

mit Punkt  $P(2|24)$  und  $m$  eingesetzt folgt  $b$ :

$$24 = 36 \cdot 2 + b \quad | -72$$

$$b = -48$$

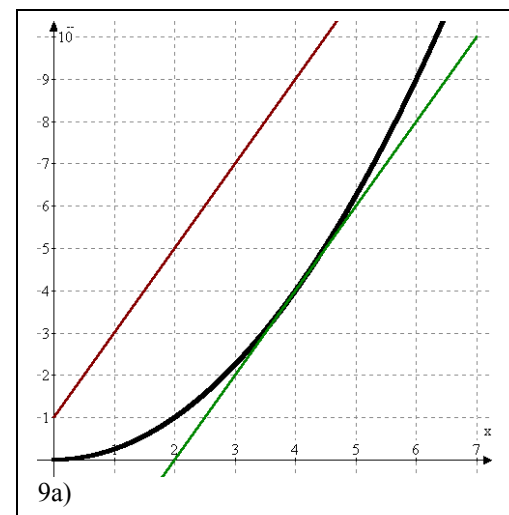
$$\Rightarrow t(x) = 36x - 48$$

**8a)**  $f(x) = 0,5 \cdot x^2 \Rightarrow$  Ableitungsfunktion:  $f'(x) = x$ An welcher Stelle  $x$  gilt  $f'(x) = 7$ ?

$$\Rightarrow f'(7) \text{ gleich } 7 \text{ setzen: } x = 7$$

Es ergibt sich sofort die Lösung: An der Stelle  $x_a=7$  beträgt die Steigung 7 !**9a)**  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow$  Ableitungsfunktion:  $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x$ Gerade  $g(x) = 2x + 1$  hat die Steigung 2, also muss  $f'(x) = 2$ 

$$\text{sein! } \frac{1}{2} \cdot x = 2 \quad \Rightarrow x = 4 \quad f(x) \text{ verläuft an der Stelle } 4$$

parallel zur Geraden  $g$  (siehe nebenstehende Skizze)!

Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153**S. 152f**

$$1a) \quad f(x) = x^3 + x^2 - x - 7 \quad \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$2a) \quad f(x) = 2x^4 - 3x + 1 \quad \Rightarrow f'(x) = 8x^3 - 3$$

$$3a) \quad f(x) = (x+1)(x-3)$$

Produkte können nicht mit der Potenzregel abgeleitet werden, daher vorher umformen (Klammer ausmultiplizieren) oder die Produktregel benutzen

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \text{Ableitungsfunktion: } f'(x) = 2x - 2$$

4a) (wieder umformen mit Potenz-/ Wurzelgesetzen!)

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x} = x^2 + x^{1/2}$$

$\Rightarrow$  Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2x^{1/2}}$$

$$\underline{f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$5a) \quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$\text{Stelle 1: } f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 4$$

$$\text{Stelle -1: } f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = 0$$

$$6a) \quad \text{bekannt: } f(x) = 2x^4 - 3x + 1 \quad \Rightarrow f'(x) = 8x^3 - 3$$

Schnittpunkt mit y-Achse: Bedingung  $x=0 \Rightarrow$  Gesucht ist  $f'(0)$  !

$$f'(0) = 8 \cdot 0^3 - 3 = -3$$

$$7a) \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Ableitungsfunktion: } f'(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$$

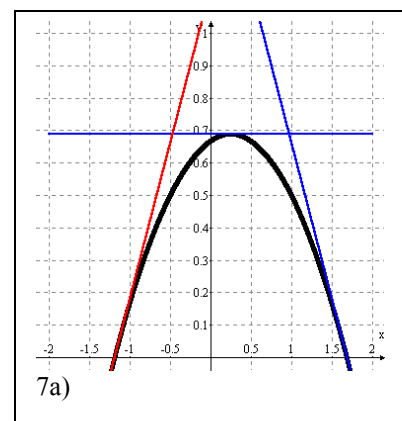
Wo ist  $f'(x) = 0$ , also gesucht Lösungen der Gleichung:

$$0 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

An der Stelle  $1/4$  beträgt die Steigung Null!



Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153

b) Man könnte den Scheitelpunkt wie bisher bestimmen (Scheitelpunktform oder Nullstellen, Mittelwert davon...)

Aber dort muss ja die Steigung von Null vorliegen, d.h. wir haben mit  $x=1/4$  bereits den  $x$ -Wert des Scheitelpunktes. Zu berechnen bleibt noch der Funktionswert:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{48} + \frac{2}{48} + \frac{32}{48} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16} \Rightarrow \boxed{s\left(\frac{1}{4} / \frac{11}{16}\right)}$$

c) Schnittstellen von  $f$  mit der  $x$ -Achse: Bedingung  $f(x)=0$

$$0 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$p - q - F :$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 2}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 1,69 \vee x_2 = -1,19$$

Steigung an diesen Stellen:

$$\underline{f'(1,69) \text{ ca. } -0,96}$$

$$\underline{f'(-1,19) \text{ ca. } 0,96}$$

**8)**  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

Schnittpunkt mit  $x$ -Achse: Bedingung  $f(x) = 0$

$$\Rightarrow 0 = x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 0 = x(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow \underline{x_1=0} \vee x^2 - 4x + 3=0$$

p-q-Formel:

$$\Rightarrow x_{2,3} = 2 \pm 1$$

$$\Rightarrow \underline{x_2=3}; \quad \underline{x_3=1}$$

Die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse sind somit:

$$\underline{N_1(0|0)}, \underline{N_2(3|0)}, \underline{N_3(1|0)}$$

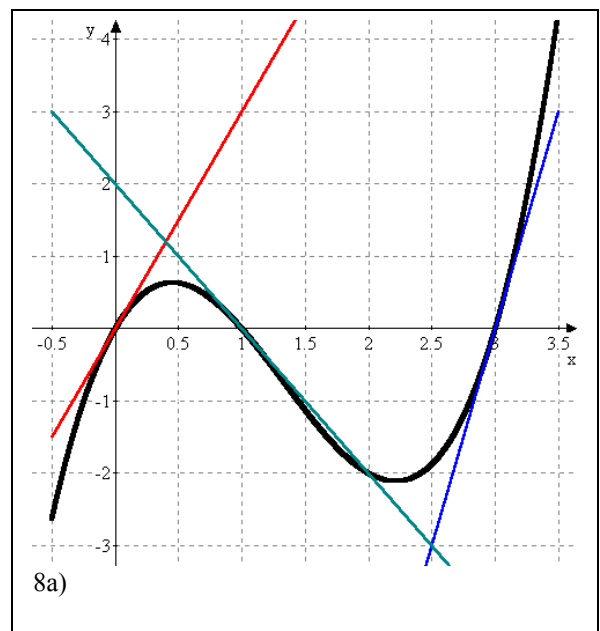
Ableitungsfunktion:  $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

Steigung in den 3 Nullstellen:

$$x_1=0 \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$x_2=3 \Rightarrow f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 3 = 6$$

$$x_3=1 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = -2$$



allgemein gilt für die Tangenten (Geradengleichung):  $t(x) = mx + b$

Setzt man jeweils den bekannten Punkt N und die Steigung ( $f'$  an dieser Stelle) ein, so folgt:

$$\text{für } x_1=0 \quad \Rightarrow 0 = 3 \cdot 0 + b \quad \Rightarrow b = 0 \quad \Rightarrow \underline{t_1(x) = 3x}$$

$$\text{für } x_2=3 \quad \Rightarrow 0 = 6 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow b = -18 \quad \Rightarrow \underline{t_2(x) = 6x - 18}$$

$$\text{für } x_3=1 \quad \Rightarrow 0 = -2 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow b = 2 \quad \Rightarrow \underline{t_3(x) = -2x + 2}$$

Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153

$$9) \quad f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$

Da  $f$  in Scheitelpunktform vorliegt, ist Scheitelpunkt bekannt: S(3|2)

Vor dem Anwenden der Potenzregel muss  $f(x)$  umgeformt werden oder Kettenregel benutzt werden:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$$

Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = x - 3$$

zu zeigen ist, dass  $f'(3) = 0$  (denn  $x=3$  ist  $x$ -Koordinate des Scheitelpunktes, s.o.)

$\Rightarrow f'(3) = 3 - 3 = 0$  **quod erat demonstrandum** (was zu beweisen war)

$$10) \quad f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6$$

$\Rightarrow$  Ableitungsfunktion:  $f'(x) = 9x^2 + x$

Steigung der Tangente, also Steigung von  $f$  an der Stelle 2:

$$m = f'(2) = 9 \cdot 2^2 + 2 = 38$$

Funktionswert an dieser Stelle:

$$f(2) = 3 \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 6 = 20$$

Für die Tangente gilt die allgemeine Geradengleichung

$$t(x) = mx + b$$

Setzt man  $m=38$  und den Punkt (2|20) ein, so folgt:

$$20 = 38 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow b = -56$$

$$\Rightarrow \underline{t(x) = 38x - 56} \quad (\text{siehe nebenstehende Skizze})$$

