Aufgabe 6: Mallbögen

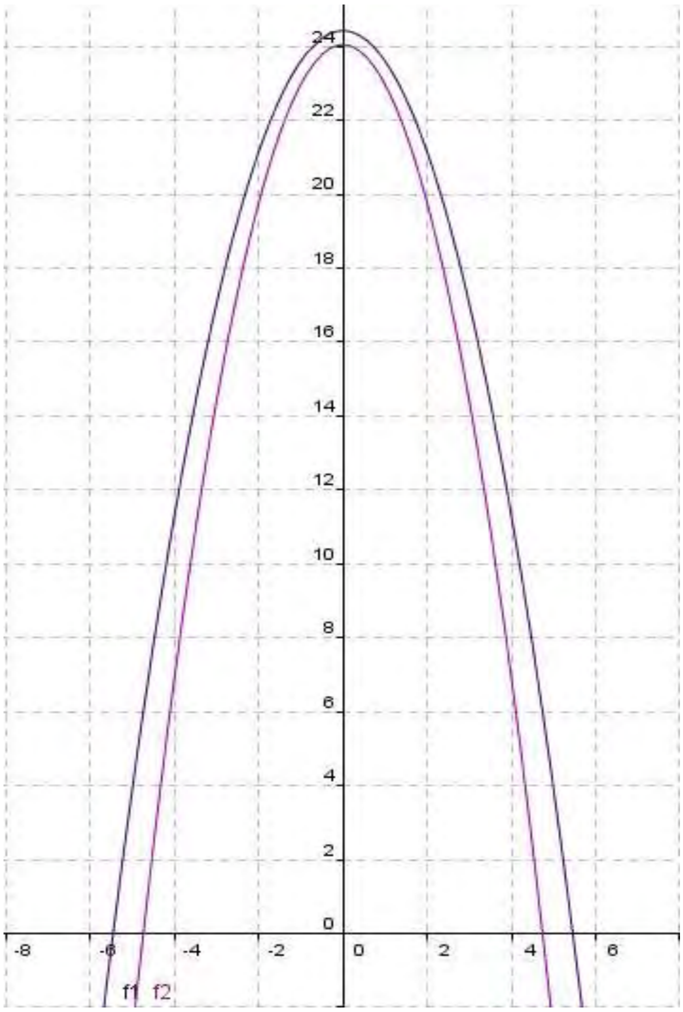
Merten Steinmann, Fenna Pust,
Alexandra Grams

Aufgabe 6 Mallbögen im Einkaufszentrum Ettlinger Tor in Karlsruhe

Im Einkaufszentrum Ettlinger Tor wird die Wandelhalle (englisch: Mall) durch eine Reihe von Mallbögen gebildet.
Diese können wir im Koordinatensystem (siehe Aufgabe f) sehen und können näherungsweise durch quadratische Funktionen beschrieben werden. Der äußere Rand (beschrieben durch $f1(x)$) hat eine Höhe von 24,42m und eine Breite von 10,92m. Der innere Rand (beschrieben durch $f2(x)$) hat eine Höhe von 24,04m und eine Breite von 9,50m.

Hinweis: Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

Um die Aufgabe leichter darstellen zu können, haben wir unseren Handwerker Kalle (auf dem Deckblatt zu sehen) gebeten, uns ein wenig zur Seite zu stehen.



f)

Leiten Sie aus den gegebenen Bedingungen die Funktionsgleichungen der beiden quadratischen Funktionen $f1(x)$ und $f2(x)$ her. Gehen sie im Folgenden davon aus, dass die Funktionsgleichungen $f1(x) = -0{,}82x^2 + 24{,}42$ und $f2(x) = -1{,}07x^2 + 24{,}04$ den äußeren und den inneren Rand der Mallbögen beschreiben.

$f1(x) = -0{,}82x^2 + 24{,}42$ (Funktionsgleichung herleiten) H(0/24,42) N(5,46/0)

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$

H in $f(x)$: $a * 0^2 + b * 0 + c = 24{,}42 \Rightarrow c = 24{,}42$

H in $f'(x)$: $2a * b = 0 \Rightarrow b = 0$ | Einsetzen

N in $f(x)$: $a * 5{,}46^2 + 0 * 5{,}46 + 24{,}42 = 0$

$= a * 5{,}46^2 + 24{,}42 = 0$ | Nach a auflösen

$a * 5{,}46^2 + 24{,}42 = 0$ | $-24{,}42$

$a * 5{,}46^2 = -24{,}42$ | $/5{,}46^2$

$a = -0{,}82$

Die Funktionsgleichung lautet: $f1(x) = -0{,}82x^2 + 24{,}42$.

$f2(x) = -1{,}07x^2 + 24{,}04$ (Funktionsgleichung herleiten) H(0/24,04) N(4,75/0)

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$

H in $f(x)$: $a * 0^2 + b * 0 + c = 24{,}04 \Rightarrow c = 24{,}04$

H in $f'(x)$: $2a * 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$ | Einsetzen

N in $f(x)$: $a * 4{,}75^2 + 0 * 4{,}75 + 24{,}04 = 0$

$= a * 4{,}75^2 + 24{,}04 = 0$ | Nach a auflösen

$a * 4{,}75^2 + 24{,}04 = 0$ | $-24{,}04$

$a * 4{,}75^2 = -24{,}04$ | $/4{,}75^2$

$a = -1{,}07$

Die Funktionsgleichung lautet: $f2(x) = -1{,}07x^2 + 24{,}04$

g)

Die Vorder- und Rückseite der Bögen sollen mit einem Schutzlack gestrichen werden. Bestimmen Sie die Fläche der Vorderseite eines Mallbogens.

Fläche A gesucht

$$A = 2 * \int_0^{5,46} f1(x)\,dx - 2 * \int_0^{4,75} f2(x)$$

$$A = 2 * [\int_0^{5,46} (-0,82x^2 + 24,42)dx] - 2 * [\int_0^{4,75} (-1,07x^2 + 24,04)dx]$$

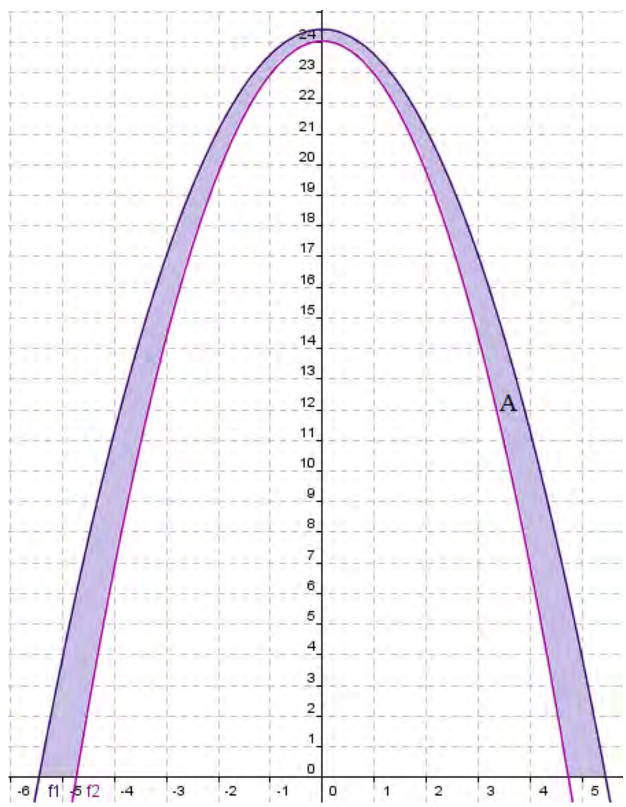
$$A = 2 * \left[-\frac{41}{150}x^3 + 24,42x\right] - 2 * \left[-\frac{107}{300}x^3 + 24,04x\right]$$

$$A = 2 * 88,84 - 2 * 75,97$$

$$A = 177,68 - 151,93$$

$$A = 25,75$$

Die Fläche der Vorderseite eines Mallbogens beträgt$25,75m^2$.



h)

Die Tiefe der Bögen beträgt $75cm$. Berechnen Sie das Volumen eines Bogens, wenn die Fläche der Vorderseite etwa $25{,}75m^2$ beträgt.

Volumen V gesucht

$V = A * t$ A=25,75 Tiefe t=0,75

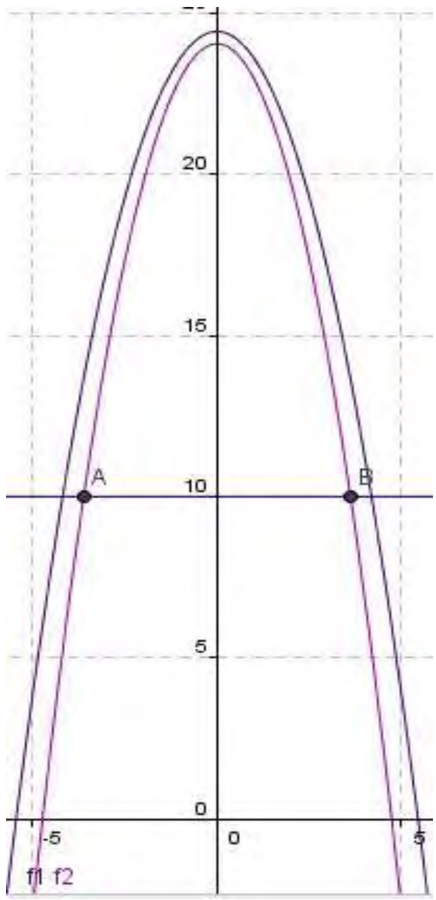
$V = 25{,}75 * 0{,}75$
$V = 19{,}31$

Das Volumen eines Mallbogens beträgt$19{,}31m^3$.

---

i)

In einer Höhe von 10m soll ein Zwischenboden eingezogen werden. Bestimmen Sie die Breite des Bodens. (Die Stärke des Bodens wird vernachlässigt.)



Breite b ($\overline{AB}$) gesucht $f2(x) = -1{,}07x^2 + 24{,}04$
$g(x) = 10$

$b = f2(x) - g(x)$ | Gleichsetzen

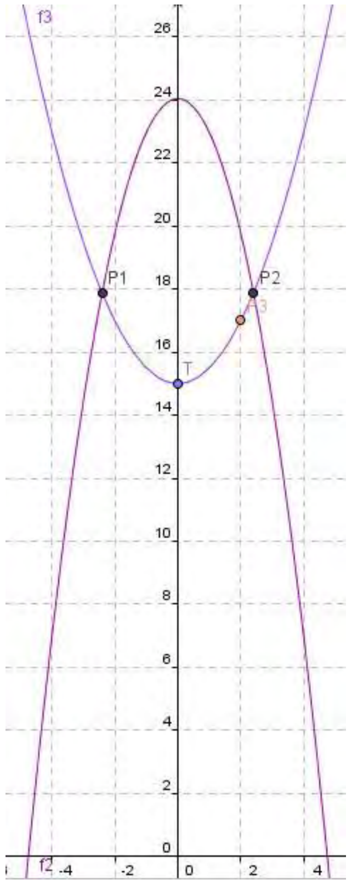
$10 = -1{,}07x^2 + 24{,}04$ $\quad | -10$
$0 = -1{,}07x^2 + 14{,}04$ $\quad | +1{,}07x^2$
$1{,}07x^2 = 14{,}04$

$x^2 = 13\frac{13}{107}$ $\quad | \pm\sqrt{13\frac{13}{107}}$

$x \approx \pm 3{,}62$

Die Breite des Bodens beträgt $3{,}62m$.

j)
An den Mallbögen sollen Girlanden aufgehängt werden. Diese hängen ebenfalls parabelförmig und werden durch $f3$ beschrieben. Sie sollen in der Mitte der Bögen $15m$ vom Boden entfernt sein und müssen $2m$ rechts und links davon $17m$ hoch hängen, da sie sonst den Lampen zu nahe kommen. Bestimmen Sie die beiden Punkte $P1$ und $P2$, an denen die Girlanden aufgehängt werden müssen.



Funktionsgleichung $f3$ gesucht T(0/15) P3(2/17)
Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$

T in $f(x)$: $a * 0^2 + b * 0 + c = 15 => c = 15$
T in $f'(x)$: $2a * 0 + b = 0 => b = 0$

Einsetzen

P3 in $f(x)$: $a * 2^2 + 0 * 2 + 15 = 17$
$= a * 2^2 + 15 = 17$

Nach a auflösen

$17 = a * 2^2 + 15 \quad | -15$
$2 = a * 2^2 \quad | /2^2$
$\frac{1}{2} = a$

Die Funktionsgleichung von $f3$(x) lautet: $f3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 15$.

P1 und P2 gesucht $f3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 15$
$f2(x) = -1{,}07x^2 + 24{,}04$

Gleichsetzen

$\frac{1}{2}x^2 + 15 = -1{,}07x^2 + 24{,}04$
$0 = -1{,}57x^2 + 9{,}04$
$1{,}57x^2 = 9{,}04$
$x^2 = 5\frac{119}{157}$
$x \approx \pm 2{,}4$

x in $f3(x)$: $\frac{1}{2} * 2{,}4^2 + 15 = 17{,}88$
x in $f2(x)$: $-1{,}07 * 2{,}4^2 + 24{,}04 \approx 17{,}88$

P1 liegt bei P1(-2,4/-17,88) und P2 bei P2(2,4/17,88).