1 Eine Übungsaufgabe zum exponentiellen Wachstum

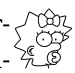
Fritz hat im Lotto 10000 Euro gewonnen. Er ist ja eigentlich sparsam, gibt am 1. Tag dann aber doch noch insgesamt 120 Euro aus. Langsam findet er Gefallen am Prassen und es melden sich auch die ersten Schnorrer, die ihre Kumpel Bescheid geben, so dass die tägliche Zunahme der Ausgaben bei 4% liegt.
a) Wieviel Geld wird Fritz in den nächsten 20 Tagen ausgeben, wenn er weiterhin seine Ausgaben täglich um 4% steigert?
b) Wann ist Fritz wieder pleite, d.h. wann sind die 10000 Euro verprasst?

❁ ❁

2 Lösung

2.1 a) Geldausgabe in 20 Tagen

Bei jeder **prozentualen** Zunahme liegt ein exponentielles Wachstum vor! Wir können die Verbrauchsfunktion also mit einer e-Funktion modellieren:
x: Anzahl der Tage nachdem Fritz die 10000 Euro erhalten hat
$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$: Tägliche Geldausgabe in Euro
Was sind hierbei a und k?
a kommt heraus, wenn wir für $x = 0$ setzen, denn „e hoch null ist eins[1]!“: $f(0) = a \cdot e^{k \cdot 0} = a \cdot 1 = a$.[2]
Unsere Betrachtung startet auch damit, dass Fritz am Anfang 120 Euro ausgibt, also ist $f(0) = 120$. Vergleich mit dem Modellansatz für exponentielles Wachstum liefert $a = 120$. Das war leicht, die Bestimmung von k ist ein kleines Bisschen schwieriger. 4% Wachstum bedeutet, dass der Wachstumsfaktor 1,04 ist. Im Einzelnen: Wir geben am Anfang 120 Euro aus und bereits einen Tag später 4% mehr. D.h. wir geben am Tag 120 Euro $\widehat{=}$ 100% zuzüglich 4% davon, das sind $120 \cdot 4\% = 4{,}8$ Euro $\widehat{=}$ 4%, also insgesamt $120 + 4{,}8 = 124{,}80$ Euro $\widehat{=}$ 100% + 4% = 104% aus. Ein Prozent ist mathematisch nichts anderes als ein Hunderstel[3], d.h. $104\% = \frac{104}{100} = 1{,}04$. Die Ausgaben haben nach einem Tag also um den Wachstumsfaktor 1,04 zugenommen. Dies soll weiter so anwachsen, das bedeutet das am 2. Tag die Ausgaben durch $f(2) = f(1) \cdot 1{,}04 = 124{,}8 \cdot 1{,}04 = 120 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 120 \cdot 1{,}04^2 \approx 129{,}79$ (in Euro und Cent) beschrieben werden. Am x. Tag haben die täglichen Ausgaben dann den Wert $f(x) = f(0) \cdot 1{,}04^x = 120 \cdot 1{,}04^x$ erreicht. Auf Abitur-Niveau soll dieses exponentielle Wachstum durch eine e-Funktion beschrieben werden, z.B. weil das Auf- und Ableiten von $f(x)$ dann erleichtert ist. Also schreiben wir den Wachstumsfaktor 1,04 mit der Eulerschen Zahl als $1{,}04 = e^{\ln 1{,}04}$ (e^x und $\ln(x)$ sind zueinander Umkehrfunktionen, siehe `http://www.warncke-family.de/fos/umkehrfunktion.pdf`). Wir können damit unsere Verbrauchsfunktion also mit einer e-Funktion schreiben: $f(x) = 120 \cdot 1{,}04^x = 120 \cdot (e^{\ln 1{,}04})^x$. Nach den sogenannten Potenzgesetzen[4] können wir noch zusammen fassen:



$$f(x) = 120 \cdot e^{\ln(1{,}04) \cdot x}$$

Wir erkennen durch Vergleich mit unserem Modellansatz, dass $a = 120$ und $k = \ln 1{,}04 \approx 0{,}039220713 \approx 0{,}039$. Wenn wir diesen Aufgabenteil als Steckbriefaufgabe begreifen, können wir auch sagen, dass durch die Aufgabenstellung zwei Punkte (bzw. Wertepaare) gegeben sind $(0 \mid 120)$ und $(1 \mid 124{,}80)$, die mit dem Ansatz $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ auf zwei Gleichungen führen, mit denen die beiden Koeffizienten a und

---
[1] nicht null!
[2] Emimi, die kleine Schwester von EPinweFni, bedeutet: „Eins mal irgendwas macht irgendwas“ ☺
[3] siehe `http://www.warncke-family.de/E/bruch%20und%20zins.pdf`
[4] siehe `http://www.warncke-family.de/fos/potenzrechnung.pdf`

k bestimmt werden können:

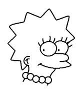
$$120 = a \cdot e^{k \cdot 0} \qquad \Rightarrow 120 = a \text{ einsetzen in 2. Gleichung} \qquad (1)$$
$$124{,}80 = 120 \cdot e^{k \cdot 1} = 120 \cdot e^{k} \qquad |:120 \qquad (2)$$
$$1{,}04 = e^{k} \qquad |\ln \qquad (3)$$
$$\ln 1{,}04 = \ln(e^{k}) = k \qquad (4)$$

Nach 20 Tagen gibt Fritz bereits $f(20) = 120 \cdot e^{k \cdot 20} \approx 262{,}93$ Euro am Tag aus. Gefragt ist aber, wieviel insgesamt innerhalb dieser 20 Tage ausgegeben wurde. Diese Summe wird wohl zwischen $120 \cdot 20 = 2400$ Euro und $262{,}93 \cdot 20 = 5258{,}60$ Euro liegen. Die Lösung ergibt sich durch die Integralrechnung. Wenn $f(x)$ den Euroverbrauch **pro Tag** angibt, wird das Integral $\int_0^t f(x)\,dx$ den Gesamtverbrauch zwischen Tag 0 und Tag t widerspiegeln. Die Lösung ist demnach

$$V(20) = \int_0^{20} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^{20}$$

Der `Casio fx991-ES` liefert uns den Zahlenwert ohne Umschweife:
[∫] [1] [2] [0] [×] [SHIFT] [ln] [•] [0] [3] [9] [×] [ALPHA] [)] [▶] [0] [▶] [2] [0] [=] (eventuell muss zuvor [ON] [MODE] [1] gedrückt worden sein)

Auf (Fach-)Abiturniveau muss aber zumindest die Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$ explizit angegeben werden. Wir merken uns: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow F(x) = \frac{a}{k} \cdot e^{k \cdot x} + C$, wobei C die sogenannte nicht näher bestimmte Integrationskonstante ist. Also hat Fritz innerhalb von 20 Tagen etwa $\int_0^{20} f(x)\,dx \approx \Big[\frac{120}{0{,}039} \cdot e^{0{,}039 \cdot x}\Big]_0^{20} \approx 3635$ Euro insgesamt verbraucht (bei genaueren Zahlenangaben von k ergeben sich leicht höhere Gesamtausgaben).



❁ ❁

2.2 b) Pleitedatum

Nachdem wir a) gelöst haben ist der Rest ja fast ein Klacks. In a) haben wir verstanden, dass das Integral den Gesamtverbrauch beschreibt. Also ist doch klar, dass die Lösung der Zeitpunkt t ist, wenn der Gesamtverbrauch $V(t)$ gleich dem ursprünglichen Geldreservoir 10000 Euro ist. Wir müssen also nur lösen:

$$10000 = \int_0^t f(x)\,dx \approx \Big[\frac{120}{0{,}039} \cdot e^{0{,}039 \cdot x}\Big]_0^t$$

„Ja aber wir kennen doch t gar nicht" — „Na und? Wir haben eine Gleichung mit einer Unbekannten t, ergo: let's solve this simple equation ☺". $F(0)$ ist bekannt: $F(0) \approx \frac{120}{0{,}039} \approx 3077$.

$$10000 = \int_0^t f(x)\,dx = F(t) - F(0) \qquad | + F(0) \text{ hierbei Wert von } F(0) \text{ einsetzen} \qquad (5)$$
$$13077 \approx F(t) \approx \frac{120}{0{,}039} \cdot e^{0{,}039 \cdot t} \qquad |:3077 \qquad (6)$$
$$4{,}25 \approx e^{0{,}039 \cdot t} \qquad |\ln \qquad (7)$$
$$\ln 4{,}25 \approx 0{,}039 \cdot t \qquad |:0{,}039 \qquad (8)$$
$$37 \approx t \qquad (9)$$

Die 10000 Euro sind unter den angegebenen Voraussetzungen in etwa 37 Tagen verbraucht (siehe LS, S. 233 Beispiel 2).