SZ Neustadt — Mathematik — Torsten Warncke
FOS 12c 30.01.2008

Übungsaufgaben zur Kurvendiskussion

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(x-3)^2$.
   (a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie.
   (b) Bestimmen Sie die Lage der Extrema und Wendepunkte.
   (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.
   (d) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung: (a) keine Symmetrie
(b) Minimum bei $(3|0)$, Maximum bei $(1|4)$, Wendepunkt bei $(2|2)$

2. Gegeben ist die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{20}\,(x^4 - 24\,x^2 + 80)$.
   (a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie- und Monotonieverhalten.
   (b) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen.
   (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.
   Geben Sie die Lage der Extrema und Wendepunkte an.
   (d) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung: (a) achsensymmetrisch
(b) $N_1(2|0)$, $N_2(-2|0)$, $N_3(\sqrt{20}|0)$, $N_4(-\sqrt{20}|0)$
(c) Maximum bei $(0|4)$, Minima bei $(\pm\sqrt{12}|-3\frac{1}{5})$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ mit $a > 0$ und $D = \mathbb{R}$.
   (a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
   Für welche Werte a erhält man drei, zwei bzw. eine Nullstelle?
   (b) Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte mit waagrechten Tangenten.
   Für welche Werte a erhält man zwei, einen bzw. keinen Punkt mit waagrechter Tangente?
   (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
   (d) Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte für festes b und variables a.
   (e) Geben Sie für $a = \frac{3}{4}$ und $b = 2$ die Funktionsgleichung, Lage der Extrema und Wendepunkte an.
   (f) Zeichnen Sie die Funktion mit den Parameterwerten aus (e).

Lösung: (a) $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a})$,
eine Nullstelle, wenn $x_{2/3}$ nicht existiert, also wenn $a > \frac{1}{4}b^2$
zwei Nullstellen, wenn $x_2 = x_3$, also wenn $a = \frac{1}{4}b^2$
drei Nullstellen, wenn x_2 und x_3 existieren und verschieden sind, also wenn $a < \frac{1}{4}b^2$

(b) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = \frac{1}{3a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 3a})$
keine waagrechte Tangente, wenn $x_{4/5}$ nicht existieren, also wenn $a > \frac{1}{3}b^2$
eine waagrechte Tangente, wenn $x_4 = x_5$, also wenn $a = \frac{1}{3}b^2$
zwei waagrechte Tangenten, wenn x_4 und x_5 existieren und verschieden sind, also wenn $a < \frac{1}{3}b^2$

(c) $x_W = -\frac{b}{3a}$, $y_W = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{b}{3a}$
(d) $y_w = \frac{2}{3}bx_w^2 + x_w$
(e) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + 2x^2 + x$, $N_1(0|0)$, $N_2(-2|0)$, $N_3(-\frac{2}{3}|0)$,
$E_1(-0{,}30|-0{,}14)$, $E_2(-1{,}48|0{,}47)$, $W_1(-0{,}89|0{,}16)$
(f)

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$.

(a) Diskutieren Sie qualitativ, wie der Graph von $f(x)$ aussieht.
(b) Bestimmen Sie Extrema und Wendepunkte der Funktion.
(c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion.
(d) Bei Polynomen fünften Grades können die Nullstellen nicht mehr analytisch bestimmt werden. Ein Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung ist das Newton-Verfahren:

An den Graphen der Funktion wird in einem Punkt $(x_i|y_i)$, in der Nähe einer Nullstelle, eine Tangente gelegt. Deren Schnittpunkt mir der x-Achse liefert x_{i+1}. Zu diesem $x-$Wert wird der zugehörige Funktionswert y_{i+1} berechnet. Nun beginnt das Verfahren erneut. Die Folge x_1, x_2, x_3... konvergiert gegen die Nullstelle, wenn $|f'' \cdot f/f'^2| < 1$ ist.

Machen Sie sich dieses Verfahren der Nullstellenbestimmung anhand einer Skizze klar.

(e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Intervall [0,1] (Maßstab für x-Richtung: $1 \hat{=} 10cm$) und bestimmen Sie in diesem Intervall graphisch die Nullstelle.
(f) Leiten Sie eine Formel zur numerischen Iteration der Nullstelle her.
(g) Wenden Sie die Formel auf obige Funktion an. Starten Sie bei $x_1 = 1$ und rechnen Sie bis i=6.

Lösung: (a) Für x gegen minus (plus) unendlich geht der Graph von $f(x)$ gegen minus (plus) unendlich. Der Graph kann kein, zwei oder vier Extrema haben. Der Graph kann einen, zwei oder drei Wendepunkte haben.
(b) $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$, $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3) \Rightarrow$
Maximum bei $H(0|1)$, Minimum bei $T(4|-255)$, Wendepunkt bei $W(3|-161)$
(c)
(d)
(e)
(f) $t_{x_i}(x) = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i) = 0 \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{y_i}{f'(x_i)}$
(g) $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^5 - 5x_i^4 + 1}{5x_i^4 - 20x_i^3} \Rightarrow$
$x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}8$, $x_3 = 0{,}712070...$, $x_4 = 0{,}694818...$,
$x_5 = 0{,}694204$, $x_6 = 0{,}6942032$

5. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x - 2$ mit der Nullstelle $x_{01} = -2$.

   (a) Berechnen Sie die restlichen Nullstellen von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Schreiben Sie die vollständige Zerlegung von f in Linearfaktoren hin.

   (b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der relativen Extremwerte.

   (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

   (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-4\,;\,5]$.

Lösung: (a) $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2(x-4)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

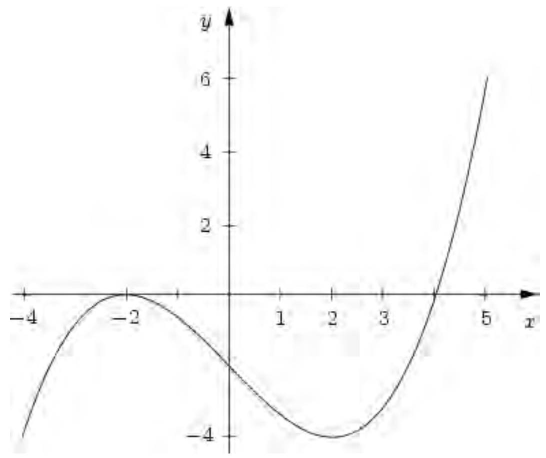
(b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}(x^2 - 4)$

f steigend in $]-\infty\,;-2\,[$ und in $]\,2\,;+\infty\,[$, fallend in $]-2\,;\,2\,[$.
Relatives Maximum bei $(-2\,|\,0\,)$, relatives Minimum bei $(\,2\,|-4\,)$

(c) $f''(x) = \frac{3}{4}x$. Rechtsgekrümmt in $]-\infty\,;\,0\,[$, linksgekrümmt in $]\,0\,;+\infty\,[$

Wendepunkt: $(\,0\,|-2\,)$

(d)



6. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}(x-3)(x+1)^3$.

   (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f hin!
   Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

   (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extremwerte.
   f' ist als Produkt von Linearfaktoren darzustellen!

   (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

   (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 3{,}5$ (Einheit 1cm).

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstellen von f: $x_{01} = -1$, $x_{02} = 3$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

(b) $f'(x) = \dfrac{2}{5}(x+1)^2(x-2)$, Nullstellen von f': $x_{11} = -1$, $x_{12} = 2$

$f'(x) \leqq 0$ in $]-\infty\,;\,2\,]$, $f'(x) \geqq 0$ in $[\,2\,;\,+\infty\,[$, rel. Min. bei $(\,2\,|\,-2{,}7\,)$

(c) $f''(x) = \dfrac{6}{5}(x+1)(x-1)$, Nullstellen von f'': $x_{21} = -1$, $x_{22} = 1$

$f''(x) > 0$ in $]-\infty\,;\,-1\,[$ und in $]\,1\,;\,+\infty\,[$, $f''(x) < 0$ in $]-1\,;\,1\,[$

Wendepunkte bei $(-1\,|\,0\,)$ (Terrassenpunkt) und bei $(\,1\,|\,-1{,}6\,)$

7. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{1}{50}(x+3)(x-2)^4$.

   (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f hin. Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

   (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extremwerte. f' ist als Produkt von Linearfaktoren darzustellen!

   (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

   (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-3{,}5 \leqq x \leqq 4{,}5$ (Einheit 1cm).

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstellen von f: $x_{01} = -3$, $x_{02} = 2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{10}(x-2)^3(x+2)$, Nullstellen von f': $x_{11} = -2$, $x_{12} = 2$

$f'(x) \geqq 0$ in $]-\infty\,;\,-2\,]$ und in $[\,2\,;\,+\infty\,[$, $f'(x) \leqq 0$ in $[-2\,;\,2\,]$

rel. Min. bei $(\,2\,|\,0\,)$, rel. Max. bei $(\,-2\,|\,5{,}12\,)$

(c) $f''(x) = \dfrac{2}{5}(x-2)^2(x+1)$, Nullstellen von f'': $x_{21} = -1$, $x_{22} = 2$

$f''(x) < 0$ in $]-\infty\,;\,-1\,[$, $f''(x) > 0$ in $]-1\,;\,+\infty\,[$

Wendepunkt bei $(-1\,|\,3{,}24\,)$, das Minimum bei $(\,2\,|\,0\,)$ ist ein Flachpunkt.

8. Diskutieren Sie die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2$$

   nach allen Regeln der Kunst und zeichnen Sie ihren Graphen.

Lösung: NS: $x_{01} = 2 - \sqrt{22} \approx -2{,}69$, $\quad x_{02} = 0$, $\quad x_{03} = 2 + \sqrt{22} \approx 6{,}69$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - x^2 - 3x$

$f''(x) = x^2 - 2x - 3$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1-\sqrt{5})\middle|\,\frac{9}{8}\left(-13+5\sqrt{5}\right)\right) \approx (-1{,}85\,|\,-2{,}05)$

rel. Maximum bei $(0\,|0\,)$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1+\sqrt{5})\middle|\,\frac{9}{8}\left(-13-5\sqrt{5}\right)\right) \approx (4{,}85\,|\,-27{,}2)$

Wendepunkt bei $\left(-1\middle|-\frac{13}{12}\right) = (-1\,|\,-1{,}08\overline{3})$

Wendepunkt bei $\left(3\middle|-\frac{63}{4}\right) = (3\,|\,-15{,}75)$

9. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{8}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x$$

im maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

(b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und auf Extremwerte.

(c) Ermittlen Sie das Krümmugsverhalten von f und die Wendepunte.

(d) Zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $[-0{,}5; 8]$ in der Einheit 1 cm.

Lösung: (a) $f(x) = \frac{x}{8}\left(x^2 - 12x + 36\right) = \frac{x}{8}(x-6)^2 \qquad f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 0,\ x_{02} = 6$

(b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \frac{3}{8}\left(x^2 - 8x + 12\right) \qquad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x + 4^2 = -12 + 16$

$x_{11} = 2$, $x_{12} = 6$, $\qquad f'$ ist eine nach oben geöffnete Parabel $\Longrightarrow$

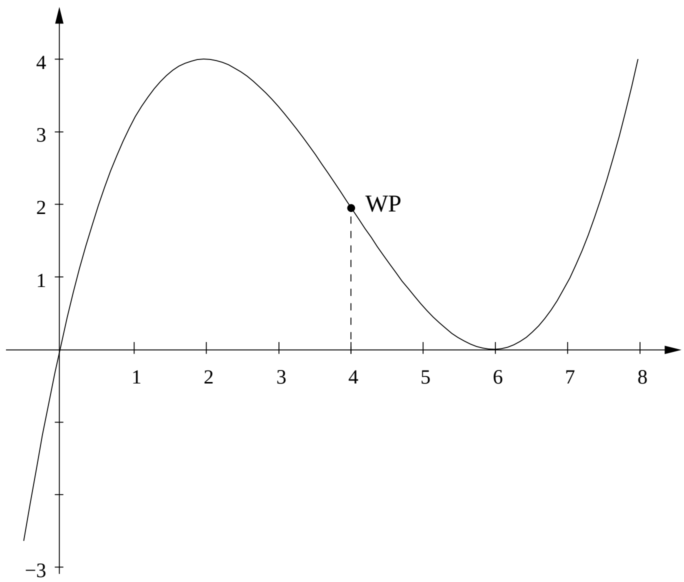
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ streng steigend in }]-\infty; 2[\text{ und in }]6; \infty[\\ f'(x) < 0 \text{ und } f \text{ streng fallend in }]2; 6[\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{rel. Max. bei } (2|4) \\ \text{rel. Min. bei } (6|0) \end{array}\right.$$

(c) $f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \qquad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 4 \quad \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ und } f \text{ rechtsgekrümmt in }]-\infty; 4[\\ f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ linksgekrümmt in }]4; \infty[\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Wendepunkt bei } (4|2)$$

(d)

x	$f(x)$
$-0{,}5$	$-2{,}64$
0	0
1	3,125
3	3,375
5	0,625
7	0,875
8	4
x	$f''(x)$
2	-1,5
6	+1,5
8	4
x	$f'''(x)$
4	0,75



10. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 10x^2 + 9).$$

(a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion auf Symmetrie.

(b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(\,-3\,|\,?\,)$. Zeichnen sie die Tangente in ein Koordinatensystem mit $x \in [\,-5\,;\,5\,]$ und $y \in [\,-3\,;\,6\,]$ ein.

(c) Unter welchem Winkel schneidet die Tangente im Punkt $\left(\frac{3}{2}\,|\,?\right)$ die x-Achse?

(d) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

(e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion. Wo liegen Extrema und Terrassenpunkte?

(f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-4\,;\,4]$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe (b).

Lösung: (a) $f(x) = f(-x)$, also achsensymmetrisch.

(b) $t(x) = -3x - 9$

(c) $\alpha = 45{,}9^\circ$

(d) $N_1(-3|0), N_2(-1|0), N_3(1|0), N_4(3|0)$

(e) Maximum bei $P(0|\frac{9}{16})$, Minima bei $Q(-\sqrt{5}|-1)$ und bei $R(\sqrt{5}|-1)$

11. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \sin 2x - \cos x \quad$ mit $\quad D_f = \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Berechnen Sie die Nullstellen und die Punkte mit waagrechter Tangente! Zeichnen Sie G_f!

Lösung: Nullstellen: $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\,\pi}{6}, \dfrac{3\,\pi}{2}$

$f'(x) = 2\,\cos 2\,x + \sin x = -4\,\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow$

$\sin x = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$

Waagrechte Tangenten bei $-0{,}202\,\pi$, $0{,}319\,\pi$, $0{,}681\,\pi$ und $1{,}202\,\pi$